Université Claude-Bernard Lyon 1

# FDM2 INFO, printemps 2022

# Fiche TD n°8,

# Développements limités et formules de Taylor

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ : Fait pendant l'ES
**Exercice** : Fait pendant le TD
**Exercice** : A faire à la maison.
**Exercice*** : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

## La règle de l'Hôpital

**Exercice 1.** En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x-\sin(x)}{x^2+\sin(2x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2x}$.

**Exercice 2.** En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)\cdot\ln(1-x)}{e^x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(2\pi x)^{\frac{1}{x}}$.

## Fonctions équivalentes, négligeables ou dominées

**Exercice 3.** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $x^2+x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $x^2+x \underset{x\to +\infty}{\sim} x$.
3. $x^2 = \underset{x\to 1}{o}(x)$.
4. $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
5. $x^5+x^2+x = \underset{x\to 0}{o}(x^5)$.
6. $x^5+x^2+x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
7. $e^x = \underset{x\to 0}{o}(\ln(|x|))$.
8. $2x+1 = \underset{x\to +\infty}{O}(x)$.
9. $x^2 = \underset{x\to 0}{O}(x^3)$.

**Exercice 4.** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $\sin(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
2. $\sin(x) = \underset{x\to +\infty}{o(x)}$.
3. $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
4. $\ln(|x|) = \underset{x\to 0}{o}(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

**Exercice 5.** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

1. $x^4+5x^2-6x$ en 0 et en $+\infty$.
2. $x^7+\sqrt{x}+\ln(x)^2+e^{2x}+4x^5-x^9+5^{x+1}$ en $+\infty$.
3. $x+sin(x)$ en 0 et $+\infty$.
4. $\sqrt{x}+\ln(x)$ en 0 et $+\infty$.

**Exercice 6.** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
2. $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+2x$.
3. $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} 0$.
4. $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
5. $e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$.
6. $e^{x^2}-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

## Les développements limités (surtout en 0)

On rappelle la formule de Taylor-Young. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n$ sur l'intervalle ouvert $I$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n).$$

**Exercice 7.** Donner par un calcul direct le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $3 + \ln(1 + x + x^2)$.
2. $\exp(\cos(x))$.
3. $1 + \tan(x)$.

**Exercice 8.** Donner par un calcul direct puis en utilisant le formulaire un développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(3\cos(x))$.
2. $\sqrt{1 + \exp(2x)}$.

**Exercice 9.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(2 + x)$.
2. $\dfrac{1}{2 + x}$.
3. $\sqrt{2 + x}$.

**Exercice 10.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(3 - x)$.
2. $\dfrac{1}{3 + x}$.
3. $\sqrt{4 + x}$.

**Exercice 11.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + x)\sin(x)$.
2. $\ln(1 + \sin(x))$.
3. $\dfrac{\sin(x)}{1 + \ln(1 + x)}$.

**Exercice 12.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + x)\cos(x)$.
2. $\ln(1 + \cos(x))$.
3. $\dfrac{\cos(x)}{1 + \ln(1 + x)}$.

**Exercice 13.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1. $(1 - x)^3$.
2. $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$.
3. $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$.
4. $\dfrac{\ln(1 + x)}{e^x \sin(x)}$.

**Exercice 14.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1. $(1 - x)^4$.
2. $(1 + x^3)^{\frac{1}{x^2}}$.
3. $\dfrac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$.
4. $\dfrac{\ln(1 + x)}{e^x \cos(x)}$.

**Exercice 15.** Si elles existent, calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{6x-\sin(x)}{x^2+\sin(2x)}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$.
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\ln(1+\sin(x))}{x^2}$.

**Exercice 16.** Si elles existent, calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin(x)^4}(\sin(\dfrac{x}{1+x})-\dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)})$.

**Exercice 17.**
1. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x^2\ln(x)$ au voisinage de $x=1$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)$ au voisinage de $x=\dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 18.**
1. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $e^{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x=1$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\cos(x)$ au voisinage de $x=\dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 19.** Considérer la fonction $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{1/x}\sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :
$$\frac{f(x)}{x}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}(\frac{1}{x^3}).$$
2. En déduire que la droite $y=x+1$ est asymptote au graphe de $f$ au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 20.** Considérer la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+, x\mapsto\sqrt{1+x+x^2}$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :
$$\frac{f(x)}{x}=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}(\frac{1}{x^2}).$$
2. En déduire que la droite $y=x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote au graphe de $f$ au voisinage de $+\infty$.

## Quelques applications de la formule de Taylor-Lagrange

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que :
$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!}+\frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

**Exercice 21.** On considère $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto\ln(1+x)$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in]0,+\infty[$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour $f$ à l'ordre $n$ entre 0 et $x$.
Indication : Montrer, que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
2. Montrer que, pour tout $x>0$, on a :
$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

3. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à $10^{-8}$ près.
4. En utilisant la question 2, montrer que pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$.

**Exercice 22.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour exp à l'ordre $n$ entre 0 et 1.

2. En déduire que pour $n \geq 2$ :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$
3. Montrer que $e$ est irrationnel.

   Indication : Supposer par l'absurde que $e = \dfrac{p}{q}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et appliquer la question 1) pour un entier $n$ bien choisi.

**Exercice 23.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour cos à l'ordre $n$ entre 0 et $x$.

2. En déduire une valeur approchée de $\cos(\frac{\pi}{32})$ à $10^{-5}$ près.

**Exercice 24.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour sin à l'ordre $n$ entre 0 et $x$.

2. En déduire une valeur approchée de $\sin(\frac{\pi}{32})$ à $10^{-5}$ près.

**Exercice* 25.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $f''$ n'est pas majorée par 4.

**Exercice* 26.** (Inégalité de Komolgorov) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$. On suppose que $f$ et $f''$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_1.$$
2. En déduire que $f'$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2M_0M_1.$$

# Formulaire de développement limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x\to0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)$$

$$\operatorname{ch}x \underset{x\to0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right) \quad \text{(et même } o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+2}\right)\text{)}$$

$$\operatorname{sh}x \underset{x\to0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{(et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\text{)}$$

$$\cos x \underset{x\to0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right) \quad \text{(et même } o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+2}\right)\text{)}$$

$$\sin x \underset{x\to0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{(et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\text{)}$$

........................................................................................................................

$$(1+x)^a \underset{x\to0}{=} 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right) \quad (a \text{ réel donné})$$

$$\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k+o\left(x^n\right) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x\to0}{=} 1+ax+o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x\to0}{=} 1+\frac{1}{2}x+o(x)$$

........................................................................................................................

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}x^k+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to0}{=} 1-x+x^2+\ldots+(-1)^nx^n+o\left(x^n\right) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to0}{=} -x-\frac{x^2}{2}+\ldots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right) \underset{x\to0}{=} -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$$

$$\operatorname{Arctan}x \underset{x\to0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{(et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\text{)}$$

Les développements en 0 de Arcsin et de tan et th ne font pas partie du cours mais constituent une activité classique en classe préparatoire.

# Formulaire d'équivalents usuels

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

---

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \text{sh}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} \text{th}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \ \text{ch}\,(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

---

$$\arccos(x) \underset{x\to 1,\ x<1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x},$$

---

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x, \ (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x, \ \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

---

$$\text{ch}\,(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \text{sh}\,(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

# Les théorèmes de croissances comparées

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha \underset{x\to +\infty}{=} o(a^x)$$
$$\forall q > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ n^\alpha \underset{n\to +\infty}{=} o(q^n)$$
$$\forall a \in ]0,1[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ a^x \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\alpha)$$
$$\forall q \in ]0,1[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ q^n \underset{n\to +\infty}{=} o(n^\alpha)$$
$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ a^x \underset{x\to -\infty}{=} o(|x|^\alpha)$$

---

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \log_a^\beta(x) \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\alpha)$$
$$\forall a > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \log_a^\beta(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \text{ (ou encore } x^\alpha \log_a^\beta(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{\longrightarrow} 0)$$

Quand $n$ tend vers $+\infty$,

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt[3]{n} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n\ln(n) \ll n\sqrt{n} \ll n^2 \ll (1,01)^n \ll n! \ll n^n$$

et aussi,

$$1 \gg \frac{1}{\ln(\ln(n))} \gg \frac{1}{\ln(n)} \gg \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \gg \frac{1}{\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n\ln(n)} \gg \frac{1}{n\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n^2} \gg \frac{1}{(1,01)^n} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^n}$$