Université Claude-Bernard Lyon 1

# FDM2 INFO, printemps 2022

# Fiche TD n°6,

# Intégration

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ : Fait pendant l'ES.
**<u>Exercice</u>** : Fait pendant le TD.
**Exercice** : A faire à la maison.
**Exercice*** : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

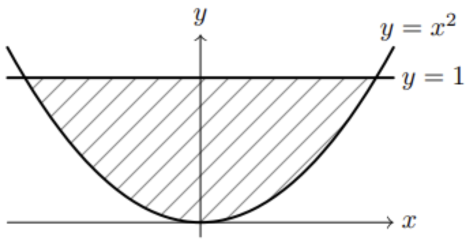
## <u>Calcul d'aires</u>

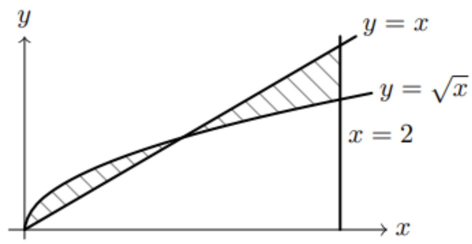
**Exercice 1.** Considérons

$$\begin{aligned} f\colon\ [-1,1] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

1. Dessiner le graphe de $f$.
2. Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que si l'on pose $\theta = \arccos(x)$, alors $(x, f(x)) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
3. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

**<u>Exercice</u> 2.** Déterminer l'aire des domaine hachurés représentés ci-dessous.

1.


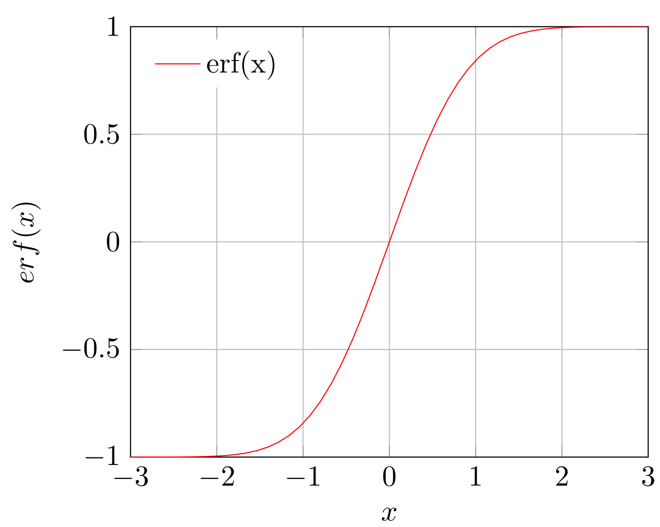

2.



**<u>Exercice</u> 3.** Déterminer sans aucun calcul la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x) dx.$$

On pourra s'aider d'un dessin.

**Exercice 4.** On défini la fonction $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, dont la représentation graphique est :



Déterminer graphiquement, sans aucun calcul d'intégrale la valeur de :

$$\int_{-2}^{2} erf(x)dx.$$

**Exercice 5.** On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx = 1/2.$$

2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier $u_n$ et $v_n$ sur $[0,1]$ par

$$\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}, \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions $f$, $u_n$ et $v_n$. Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}.$$

3. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, en conclure que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1/2$
4. Finalement, retrouver le résultat encore une fois en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.

**Exercice 6.** On considère la fonction

$$\begin{aligned} g\colon\ [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier $u_n$ et $v_n$ sur $[0,1]$ par

$$\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}, \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, \quad u_n(x) = g\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = g\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions $g$, $u_n$ et $v_n$. Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq \int_0^1 g(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2.$$

2. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, retrouver la valeur de $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$.

   *Indication : on pourra prouver par récurrence que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Finalement, retrouver le résultat encore une fois en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.

## Sommes de Riemann

On rappelle le résultat suivant. Si $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx.$$

**Exercice 7.** En utilisant le résultat sur les sommes de Riemann, calculer la limite des suites suivantes :

1. $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}$
2. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
3. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{k^3+n^3}$

**Exercice 8.** En utilisant le résultat sur les sommes de Riemann, calculer la limite de la suite :

$$\sum_{k=1}^{3n}\frac{\sqrt{\frac{k}{n}}}{k}$$

**Exercice 9.** En utilisant le résultat sur les sommes de Riemann, calculer la limite des suites suivantes :

1. $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$,
2. $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}$,
3. $\displaystyle \sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$

**Exercice 10.** En utilisant le résultat sur les sommes de Riemann, et une intégration par partie, calculer la limite de la suite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

**Exercice 11.** Déterminer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}.$$

*Indication : On pourra étudier la suite* $(\ln(u_n))$*, une primitive de* $\ln x$ *est* $x\ln x - x$*.*

## Intégrales de Riemann

**Exercice 12.** Soit $E(x)$ la partie entière de nombre réel $x$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{3} E(x)dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{4} E\left(\sqrt{x}\right)dx$.

**Exercice$^*$ 13** (Une fonction non intégrable)**.** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Soit $g$ une fonction en escalier telle que $g \geq f$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geq 1$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
2. De la même manière, montrer que si $h$ est une fonction en escalier $\leq f$, alors $h \leq 0$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).

3. En déduire que

$$\inf\left\{\int_0^1 g(x)dx,\ g \text{ en escalier et } g \geq f\right\} = 1,$$
$$\sup\left\{\int_0^1 h(x)dx,\ h \text{ en escalier et } h \leq f\right\} = 0.$$

4. Conclure.

**Exercice* 14** (Comparaison série-intégrale)**.** On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k},$$
par exemple avec un dessin, en graphant la fonction $x \mapsto 1/x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx.$$
3. Que peut-on en conclure sur $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ?

**Exercice 15.** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$.

## Intégrations par parties

**Exercice 16.** Une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$, On pose $\alpha \in ]0;1[$.

1. Calculer $\displaystyle\int_\alpha^1 \ln(x)\,dx$ à l'aide de la primitive de $\ln x$.
2. Confirmer ce calcul d'intégrale par IPP.

**Exercice 17.** En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$
2. $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x dx$

**Exercice 18.** En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

**Exercice 19.** En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^x \sin x\,dx$

*Indication : pour l'exercice 19 2., on proposera d'utiliser* $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$ *comme primitive de* $x$*.*

**Exercice 20.** En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x-1)e^x\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x^2 - \frac{\pi x}{2} + 2)\cos x\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$

**Exercice 21.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos^2(x)dx$
2. $\displaystyle S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin^2(x)dx$

Pour la suite de l'exercice, on pose $\displaystyle W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

3. Montrer par un changement de variables que $(W_n)$ peut aussi s'écrire $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$
4. En effectuant deux intégrations par parties, trouver une relation de récurrence entre $W_n$ et $W_{n-2}$.
5. Calculer $W_n$ en fonction de $n$ et donner les valeurs de $W_n$ pour $n \in [0, \dots, 3]$ en vérifiant que $W_2 = S(\frac{\pi}{2}) = C(\frac{\pi}{2})$.

**Exercice* 22.** On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. Montrer que la suite $(W_n)$ converge. En donner sa limite.
2. Trouver une relation de récurrence pour cette suite.
3. Calculer $W_n$ en fonction de $n$.
4. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante, égale à $\frac{\pi}{2}$.
5. Trouver un équivalent de $W_n$, c'est-à-dire une suite $u_n$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{W_n} = 1$$

## Changements de variables

**Exercice 23.** En effectuant un changement de variables, calculer :

1. Avec le changement de variable $u = \ln x$, calculer $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Avec le changement de variable $u = e^x$, calculer : $\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$.
3. Avec le changement de variable $u = x^2$ (est-ce une bijection ?) calculer $\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x\cos x^2\, dx$.

**Exercice 24.** En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\, dx$
2. $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$
3. $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}\, dx$

**Exercice 25.** En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$
2. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\, dx$
3. $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\, dx$

**Exercice 26.** Soit $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire.

Montrer que

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0.$$

**Exercice* 27.** Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)\, dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

**Exercice 28.** Évaluer l'intégrale suivante : $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

## Intégrales de fractions rationnelles

**Exercice 29.** Évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x(x+2)}dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^3}dx$

**Exercice 30.** Évaluer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x^3+x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-17x}{x^3+3x^2+3x+1}dx$

**Exercice 31.** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_2^3 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

**Exercice 32.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)}$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx$

**Exercice 33.** Soit, $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$, définie sur $]2,+\infty[$.

1. Trouver toutes les primitives de $f$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

**Exercice 34.** Soit, $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, définie sur $]1,+\infty[$. Trouver toutes les primitives de $f$.

**Exercice 35.** Évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$
2. $\displaystyle\int_{\frac{-\sqrt{3}-2}{4}}^{\frac{\sqrt{3}-2}{4}} \frac{1}{x^2+x+1}dx$

   *Indication : on pourra se servir du fait que* $\arctan(a)-\arctan(b) = \arctan(\frac{a-b}{1+ab})$ *pour tout* $a$ *et* $b$ *appartenant à* $]-1,1[$

**Exercice 36.** Évaluer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}dx$

## Intégrales de fractions rationnelles trigonométriques

On rappelle le résultat suivant : lorsqu'on essaie d'intégrer des fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{P(\sin(x); \cos(x))}{Q(\sin(x); \cos(x))}$$

Où $P$ et $Q$ sont des polynômes, on peut toujours se ramener à une intégrale de fraction rationnelle, via l'application des règles de Bioche.
Dans le cas général, on pose $u = \tan\frac{x}{2}$ et donc $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ et $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. (sur un intervalle où le changement de variables a un sens, et en se rendant compte que si nous sommes sûrs de nous ramener à une intégrale de fraction rationnelle, le calcul risque d'être long, *cf exercice 42 ci dessous*)

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **37.** Évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$.

**Exercice 38.** Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin x}{3\cos x - 1}dx$$

**Exercice 39.** Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2 x}dx$$

**Exercice 40.** Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$$

**Exercice 41.** Posons les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

1. Calculer $I + J$
2. Calculer $I - J$
3. En déduire les valeurs de $I$ et $J$

**Exercice* 42.** Retrouver la valeur de l'intégrale calculée dans l'exercice 41 en utilisant le changement de variables proposé plus haut :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

*Indication*: $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

# Formulaire : Dérivées et primitives Usuelles

$f'$ désigne la dérivée de $f$ sur l'ensemble de dérivabilité $D$.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D$ | $(f\circ u)'$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | $0$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x^a \quad (a\in\mathbb{R})$ | $ax^{a-1}$ | $\mathbb{R}$ si $a\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $a\in\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon. | $(u^a)' = u'\times au^{a-1}$ |
| dont : $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $(e^u)' = u'e^u$ |
| $\ln(\lvert x\rvert)$ | $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\ln(\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $(\cos u)' = -u'\sin u$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $(\sin u)' = u'\cos u$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ | $(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ | $\mathbb{R}$ | $(\operatorname{ch} u)' = u'\operatorname{sh} u$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ | $\mathbb{R}$ | $(\operatorname{sh} u)' = u'\operatorname{ch} u$ |
| $\operatorname{th} x$ | $1-\operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | $\mathbb{R}$ | $(\operatorname{th} u)' = u'(1-\operatorname{th}^2 u) = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$ |
| $\operatorname{Arctan} x$ | $\frac{1}{x^2+1}$ | $\mathbb{R}$ | $(\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{u^2+1}$ |
| $\operatorname{Arcsin} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1,1[$ | $(\operatorname{Arcsin} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $\operatorname{Arccos} x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1,1[$ | $(\operatorname{Arccos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |

$F$ désigne une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$.
$C$ désigne une constante (qui DÉPEND de $I$).

| $f(x)$ | $F(x)$ | $I$ |
|---|---|---|
| $x^a \quad (a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$ | $\mathbb{R}$ si $a\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $a\in\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon. |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ |
| $e^{\alpha x} \quad (\alpha\in\mathbb{C}^*)$ | $\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1+\tan^2 x$ | $\tan x + C$ | $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ou $1-\operatorname{th}^2 x$ | $\operatorname{th} x + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $\operatorname{Arctan} x + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{Arcsin} x + C$ ou $-\operatorname{Arccos} x + C$ | $]-1,1[$ |

Se souvenir que

- si $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I$, une primitive de $f = u'\times v'(u)$ est $F = v\circ u + C$.
- $\int u'v = uv - \int uv'$ (intégration par parties).
- Si $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I$, en notant $x=\varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ et $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \varphi'(t) f(\varphi(t))\mathrm{d}t$ (changement de variable).