Université Claude-Bernard Lyon 1

FDM2 INFO, printemps 2022

Fiche TD n°5,

Fonctions réciproques

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Fait pendant l'ES.
Exercice : Fait pendant le TD.
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

Des fonctions réciproques

Exercice 1. On considère l'application

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \exp(x-1) - 2.$$

1. Montrer que f est injective.
   Indication : On pourra étudier les variations de f.
2. Expliciter la fonction réciproque de f avec son domain de définition.

Exercice 2. On considère l'application

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto (x-1)(x-2).$$

1. Montrer qu'il existe deux intervalles I et J maximaux (au sens de l'inclusion) tels que les applications $f_1 := f|_I$ et $f_2 := f|_J$ soient injectives.
   Indication : Trouver le minimum de la fonction f.
2. Expliciter les fonctions réciproques f_1^{-1} et f_2^{-1} avec leurs domains de définition.

Exercice 3. On rappelle que, par définition, $\operatorname{argch} := \left(\operatorname{ch}|_{\mathbb{R}_+}\right)^{-1}$ où $\operatorname{ch}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que la restriction de ch à l'intervalle spécifié est injective et donc que argch est bien définie. Ensuite trouver une expression explicite pour $\operatorname{argch}(x)$ pour tout $x \in D_{\operatorname{argch}}$.

Exercice 4. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{\exp(ax) - 1}{\exp(ax) + 1}$.

1. Expliciter l'image $\operatorname{im}(f) \equiv f(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}),\, x \mapsto f(x)$ est une bijection et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

Exercice* 5. Une fonction f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 est dite impaire (respectivement paire) si : $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$ (respectivement $f(-x) = f(x)$).

1. Montrer que si une fonction bijective sur D est impaire, alors sa fonction réciproque f^{-1} est impaire.
2. Est-ce aussi le cas pour une fonction paire ?

Exercice 6. Soit $f = \cos|_{[\pi,2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$. Exprimer $f^{-1}\colon [-1,1] \to [\pi, 2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
Indication : On pourra se servir du fait que $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin(x)$.

Exercice 7. Soit $f = \cos|_{[2\pi,3\pi]}$. Exprimer $f^{-1}\colon [-1,1] \to [2\pi, 3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

Dérivées des fonctions réciproques

Exercice 8. En utilisant la définition de la fonction arccos, trouver sa dérivée sur le domain où elle est dérivable.

Exercice* 9. En utilisant les dérivées des fonctions sin et arcsin, montrer que :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1.$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arccos(\cos(x))$.

1. Calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}\pi$.
2. Tracer le graphe de f.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x où f est dérivable.
2. Tracer le graphe de f.

Exercice 12. Donner les dérivées des fonctions suivantes définies par :

1. $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$.
2. $x \mapsto \arccos(\sin(x))$.
3. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$.
4. $x \mapsto \arctan(\sin(x))$.

Des calculs

Exercice 13. Simplifier

1. $\arccos\left(\cos(\frac{17\pi}{6})\right)$
2. $\arcsin\left(\sin(\frac{8\pi}{3})\right)$
3. $\arctan\left(\tan(\frac{-13\pi}{4})\right)$
4. $\arccos\left(\sin(\frac{7\pi}{12})\right)$

Exercice 14.
Calculer $\arcsin(\sin(a))$, $\arccos(\cos(a))$, $\arctan(\tan(a))$, $\arccos(\sin(a))$ pour $a = \dfrac{61\pi}{5}, \dfrac{76\pi}{5}, \dfrac{83\pi}{5}$.

Exercice 15.

1. Rappeler les formules d'addition.
2. En utilisant $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
3. En déduire les valeurs de $\arcsin(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4})$, $\arccos(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4})$ et $\arctan(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}})$.

Exercice 16. Calculer $\arctan 2 + \arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 17.

1. Montrer que $0 < \arccos\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arccos(x) = 2\arccos(\frac{3}{4})$.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **18.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) = \arcsin(\frac{2}{5}) + \arcsin(\frac{3}{5})$
2. $\arccos x = \arcsin 2x$.
3. $\arctan\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right) + \arctan\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 19. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\arcsin(x) = \arccos(\frac{1}{3}) + \arccos(\frac{1}{4})$
2. $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.