

Université Claude-Bernard Lyon 1
FDM2 INFO, printemps 2022

Fiche TD n°4,
Fractions Rationnelles

Exercice : Fait pendant l'ES

Exercice : Fait pendant le TD

Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD

Exercice : A faire à la maison.

Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

Quelques rappels sur les polynômes

Exercice 1. Calculer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$:

1. $P(X) = 3X^5 + 4X^2 + 1, Q(X) = X^2 + 2X + 3$
2. $P(X) = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1, Q(X) = X^3 + X + 2$
3. $P(X) = X^4 - X^3 + X - 2, Q(X) = X^2 - 2X + 4$
4. $P(X) = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9, Q(X) = X^2 - 5X + 4.$

Exercice 2. Factoriser les polynômes suivants sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

1. $X^2 - X - 12,$
2. $X^2 + X + 1.$

Exercice 3. Factoriser les polynômes suivants sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

1. $2X^2 + X - 6,$
2. $3X^2 + X + 2.$

Compléments sur les polynômes

Exercice 4. Factoriser les polynômes suivants sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

1. $X^4 + 4,$
2. $X^6 + 8.$

Exercice 5. Factoriser les polynômes suivants sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

1. $X^3 + 3X^2 + 2X + 6,$
2. $X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4.$

Indication : chercher d'éventuelles racines rationnelles.

Exercice 6. Factoriser les polynômes suivants sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

1. $5X^3 - 4X^2 - 3X + 2,$
2. $3X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 6X - 4.$

Exercice* 7. Factoriser le polynôme suivant sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

$$X^4 - X^3 - 10X^2 - X + 1.$$

Indication :

- (méthode 1) Considérer $(X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$; une fois obtenu un système approprié, appliquer la relation coefficients-racines pour les polynômes de degré 2. Conclure avec la méthode de factorisation des polynômes de degré 2.
- (méthode 2) Multiplier le polynôme par $\frac{1}{X^2}$ et considérer le changement de variable $Y = X + \frac{1}{X}$. Conclure avec la méthode de factorisation des polynômes de degré 2.

Décomposition en éléments simples

Exercice 8. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes.

$$1. \frac{1}{(X+1)(X-2)}, \quad 2. \frac{X}{(X+1)(X-2)}, \quad 3. \frac{X}{X^2-1}.$$

Exercice 9. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes.

$$1. \frac{2}{(X+3)(X-4)}, \quad 2. \frac{X}{(X+3)(X-4)}, \quad 3. \frac{3X}{X^2-4}.$$

Exercice 10. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} des fractions rationnelles suivantes.

$$1. \frac{X+2}{X^2+2}, \quad 2. \frac{X^3}{X^4-1}.$$

Exercice 11. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} des fractions rationnelles suivantes.

$$1. \frac{X+1}{X^2+1}, \quad 2. \frac{X^2}{X^3-1}.$$

Exercice 12. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante.

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$$

Exercice 13. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante.

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$$

Exercice 14. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes.

$$1. \frac{-X^2 + 2X + 1}{(X - 1)^2(X^2 + 1)} \qquad 2. \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

Exercice* 15. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction suivante.

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2}$$

Indication : Déterminer d'abord les coefficients pour X^2 et $(X^2 + X + 1)^2$, puis considérer $G(X) = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2}$ et utiliser l'unicité de la décomposition en éléments simples.

Exercice 16. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes.

$$1. \frac{X^4}{X^2 - 3X + 2}, \qquad 2. \frac{X^4 - X + 2}{(X - 1)(X^2 - 1)}.$$

Exercice 17. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes.

$$1. \frac{X^4 + 1}{X^2 + 2X - 1}, \qquad 2. \frac{X^4 - 2X + 1}{(X - 1)(X^2 - 4)}.$$

Exercice 18. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante.

$$\frac{17 - X^3}{X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4}.$$

Exercice 19. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante.

$$\frac{2X^4 + 9X^3 - 11X^2 - 6X + 12}{X^3 + 3X^2 - 9X + 5}.$$

Exercice 20. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante.

$$F(X) = \frac{1}{(X^2 + 1)^2 - X^2}.$$

Indication : Noter que F est paire, *i.e.* $F(X) = F(-X)$.

Exercice* 21. Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé *i.e.*, $P(X) = \prod_{1 \leq k \leq n} (X - a_k)^{n_k}$.

Donner la forme de la décompositions en éléments simples sur \mathbb{C} de $\frac{P'}{P}$.

Indication :

- considérer $\ln(P)$ et calculer la dérivée.
- (autre méthode) : Remarquer que $P(X) = (X - a_k)^{n_k} Q(X)$, avec $Q(a_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Calculer P' en fonction de cette expression.

Applications

Exercice 22. Utiliser la décomposition en éléments simples pour reconnaître les sommes suivantes comme sommes télescopiques.

1. Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
2. Calculer la somme $\sum_{k=2}^n \frac{2}{k^3 - k}$.

Exercice* 23. On considère $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$. On note \mathcal{C} le graphe de f .

1. Déterminer l'équation des asymptotes à \mathcal{C} en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à ses asymptotes au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 24. On pose $Q_0(X) = (X - 1)^2$ et $Q_1(X) = (X + 1)$.

1. En utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X - 1)^2(X + 1)}$, trouver des polynômes A_0 et A_1 tels que $A_0Q_0 + A_1Q_1 = 1$.
2. Est-ce que les polynômes Q_0 et Q_1 sont premiers entre eux ?

Exercice* 25. On pose $Q_0(X) = (X - 1)(X - 2)^2$, $Q_1 = X(X - 2)^2$ et $Q_2 = X(X - 1)$.

1. En utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X - 1)(X - 2)^2}$, trouver des polynômes A_0 , A_1 et A_2 tels que $A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$.
2. Est-ce que les polynômes Q_0 , Q_1 et Q_2 sont premiers dans leur ensemble ?