

Université Claude-Bernard Lyon 1
FDM2 INFO, printemps 2022
Fiche TD n° 2,
ESPACES VECTORIELS

Pour commencer

Exercice 1.

- a) Rappeler les axiomes d'un espace vectoriel.
b) On munit \mathbb{R}^2 de l'addition habituelle :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et de la loi externe :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) &\mapsto (\lambda x_1, 0). \end{aligned}$$

A-t-on muni ainsi \mathbb{R}^2 d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} ? (Justifier par rapport au point **a**)).

Exercice 2.

On munit \mathbb{R}_+^* de la loi de composition interne \times (multiplication usuelle) et de la loi externe :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x := x^\lambda. \end{aligned}$$

A-t-on muni ainsi \mathbb{R}_+^* d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} ? (Avec la multiplication usuelle comme "addition de vecteurs".)

Des sous-espaces vectoriels

Exercice 3.

Dans les cas suivants, dessiner les sous-ensembles F de $E = \mathbb{R}^2$ et indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

- | | |
|---|--|
| a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 0\}$, | f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, |
| b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 1\}$, | g) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = 3\lambda, y = 2\lambda\}$, |
| c) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, | h) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : x = 3\lambda, y = 2\lambda\}$, |
| d) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, | i) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, |
| e) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ et } y = -x^2\}$, | j) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1 \text{ et } y = -x^2\}$. |

Exercice 4.

Parmi les sous-ensembles de \mathbb{R}^n suivants, lesquels forment un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ? (Ci-dessous $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$).

- a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$, d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\}$,
 b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$,
 c) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^n k^2 x_k = 0\}$, e) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$.

Exercice 5.

Parmi les sous-ensembles des matrices suivants, lesquels forment un sous-espace vectoriel? (Ci-dessous, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$).

- a) $\{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid A_{11} = 0\}$, e) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$,
 b) $\{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid A_{11} > 0\}$, f) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible}\}$,
 c) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^n A_{ii} = 0\}$, g) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ pas inversible}\}$,
 d) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$, h) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot B = B \cdot A\}$.

Exercice 6.

On admet que $E = \mathbb{R}[X]$, des polynômes à coefficients réels, est un espace vectoriel. Parmi les sous-ensembles F ci-dessous, lesquels forment un sous-espace vectoriel?

- a) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$, e) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) + 3P'(0) = 0\}$,
 b) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 3\}$,
 c) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(3) = 0\}$, f) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$,
 d) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 3\}$, g) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = \lambda X^3 + \mu^3 X - \lambda, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7.

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels. Parmi les sous-ensembles de E ci-dessous, lesquels forment des sous-espaces vectoriels?

- a) $F = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$,
 b) $G = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_n - 1\}$.

Exercice 8.

On note $\mathbb{R}^{[a,b]}$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Rappeler les définitions de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{R}^{[a,b]}$ et dire lesquels de ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ (ou de $\mathbb{R}^{]a,b[}$ pour le e) :

- a) $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, les applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ,
 b) les applications surjectives (resp. injectives) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
 c) les applications $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$,
 d) les applications $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = f(b) + 1$,
 e) les applications $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables t.q., $\forall x \in]a, b[, f''(x) + x^2 f(x) = 0$.

Exercice 9.

On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} (c'est-à-dire dérivables n fois successivement pour tout entier n). On pose E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 4f(x) = 0$$

- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
 b) On admet que E est de dimension 2. Trouver une base de E . (*Indication : on pourra chercher parmi les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(\alpha x)$ ou $x \mapsto \cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*)

Famille libre/liée/génératrice

Exercice 10.

Étudier la dépendance linéaire des vecteurs de \mathbb{R}^2 suivants :

- a) $u = (2, -3), v = (-1, 1)$,
 b) $u = (-6, 2), v = (9, -3)$,
 c) $u = (\mu + 1, -1), v = (-3, \mu - 1)$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 11.

- a) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits *parallèles* s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ non-nul tel que $u = \lambda v$. Montrer que cette notion de parallélisme est une relation d'équivalence.
 b) Montrer que u et v sont liés si et seulement s'ils sont parallèles ou au moins un des deux vecteurs est le vecteur nul $0 \in E$.

Exercice 12.

Les familles de \mathbb{R}^3 suivantes sont-elles libres ou liées ?

- a) $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2)$; f) $u = (1, 0, -1), v = (-1, 1, 0), w = (0, -1, 1), z = (1, 1, 1)$;
 b) $u = (-6, 2, 1), v = (9, -3, 1)$;
 c) $u = (-6, 2, 0), v = (9, -3, 0)$; g) $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2), w = (-1, 4, 4)$;
 d) $u = (10, -5, 15), v = (-4, 2, -6)$; h) $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2), w = (0, 0, 1)$;
 e) $u = (1, 0, -1), v = (-1, 1, 0), w = (0, -1, 1)$; i) $u = (1, 3, 2), v = (-2, -1, -9), w = (1, 2, 3)$.

Exercice 13.

Considérer $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au maximum n .

- a) Soit $k \leq n$. Montrer que chaque famille $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ des polynômes tel que le degré de P_m est égal à m est libre.
 b) Soit $n = 2$. Donner trois polynômes de degré deux qui forment une famille libre.

Exercice 14.

Soit $F := \text{Vect}(u, v)$, le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $u = (2, -3, 2)$ et $v = (-1, 1, -2)$. Parmi les vecteurs suivants, qui appartiennent à F ?

- a) $x = (-1, 4, 4)$ b) $y = (0, 0, 1)$ c) $z = (1, 2, 3)$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

- d) $F = \text{Vect}(u, v, x)$ f) $F = \text{Vect}(u, x)$ h) $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u, v, x, y, z)$
 e) $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u, v, x)$ g) $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u, x)$

Exercice 15.

Montrer explicitement que les trois polynômes trouvés dans l'exercice 13 b ci-dessus engendrent $\mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il un argument plus simple (en utilisant des arguments du cours) ?

Des bases, la dimension et des sommes directes des espaces vectoriels

Exercice 16.

- a) Décomposer le vecteur $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base standard de \mathbb{R}^2 , puis dans la base $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (1, -3)$, c'est-à-dire déterminer les coefficients λ_k unique tel que $v = \sum_{k=1}^2 \lambda_k b_k$.
- b) Soit (b_1, \dots, b_n) une base de \mathbb{R}^n . Montrer que la décomposition d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ dans cette base aboutit à résoudre un système linéaire de la forme $Ax = b$. (En particulier, spécifier la matrice A et les vecteurs x et b .)

Exercice 17.

- a) Quelle est la dimension de \mathbb{C}^2 vu comme espace vectoriel sur \mathbb{R} ? Donner une base.
- b) Montrer que les vecteurs suivants de \mathbb{C}^3

$$v_1 = (1 + i, 1 + 2i, i), \quad v_2 = (2, 4 - i, -1), \quad v_3 = (0, -1 + 2i, 2 + i)$$

sont liés si \mathbb{C}^3 est considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{C} , et sont libres si \mathbb{C}^3 est considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} .

- c) Les vecteurs (v_1, v_2, v_3) , forment-ils une base de \mathbb{C}^3 en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{C} ? Sur \mathbb{R} ?

Exercice 18.

- a) Montrer (en vérifiant explicitement les deux propriétés qui définissent une base) que les matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forment une base de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est alors la dimension de E ?

- b) Soient $F \subset E$ et $G \subset E$ les sous-espaces vectoriels formés par les matrices symétriques et anti-symétriques, respectivement. Trouver des bases pour F et pour G . Quelles sont les dimensions de F et de G ?
- c) Rapeller la définition d'une somme directe et montrer, de deux façons différentes, que $E = F \oplus G$.

Exercice 19.

- a) Montrer que l'ensemble $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- b) Quelle est la dimension de E ? Trouver une base de E .
- c) On note $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices générées par $\{\mathbb{1}_2\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Exercice 20.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On désigne par \mathcal{P} l'ensemble des fonction paires et par \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires :

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$

- a) Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{I} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- b) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
- c) Quelle est la décomposition de la fonction exponentielle ?

Exercice 21.

On considère les sous-espaces de \mathbb{R}^4 suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\} \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\} \\ H &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = c = d\}. \end{aligned}$$

- Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
- Quelle est la dimension de $F + G$? A-t-on $\mathbb{R}^4 = F + G$? $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?
- Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 22.

On considère les sous-espaces de \mathbb{R}^3 suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\} \\ H &= \{(z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}. \end{aligned}$$

- Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
- Quelle est la dimension de $F + G$? A-t-on $\mathbb{R}^3 = F + G$? $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$.

Exercice 23.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t, 0, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
- On pose $G = F_1 \oplus F_2$. La somme $G + F_3$ est-elle directe? Justifier votre réponse.

Exercice 24.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.

Montrer que $E = F \oplus G$.

Et pour terminer

Exercice 25. Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad (n \geq 0).$$

- Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de E .
- Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de \mathcal{E} .
- Tenant compte du fait que les suites de \mathcal{E} sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1 , montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de \mathcal{E} .
- Déterminer la suite de \mathcal{E} telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.