Université Claude-Bernard Lyon 1

FDM2 INFO, printemps 2022

Fiche TD n°1,

SYSTEMES LINEAIRES ET CALCUL MATRICIEL

Préambule

Il y a trois types d'exercices : d'abord, les plus importants sont encadrés. Ils seront corrigé pendant les heures de cours ES. Ensuite, les exercices soulignés (ou des parties d'exercices soulignées) seront corrigés par vous durant les TD (travaux dirigés), sous la direction des chargés de TD. Enfin, les exercices restants (ou les parties d'exercice restantes), non soulignés, sont plutôt du même type que les précédents, et servent à vous entrainez (soit à la maison, soit durant le TD s'il reste du temps). Les CCs seront principalement basés sur les exercices encadrés ou soulignés.

Exercice : Fait pendant ES,
Exercice : Fait pendant le TD,
Exercice : La partie soulignée faite pendant le TD,
Exercice : A faire à la maison.

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

$$a)\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants.

$$a)\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Indication: On remarque la similarité entre les deux systèmes, les résoudre simultanément.

Exercice 3 (CC 2011)**.** Résoudre les systèmes suivants.

$$\underline{a)}\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + 4y + 3z = -1 \\ -3x - 2y + z = -7 \\ x - 4y - 5z = 7 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 2 \\ -2x + 3y + 4z = 3 \\ -3x - 3y + 6z = -3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes suivants.

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} -x_2+2x_4+3x_5 & = & 2 \\ -x_1+3x_2-2x_3+2x_4+3x_5 & = & 3 \\ -x_1+3x_2-x_5 & = & 1 \\ 3x_1-2x_3-7x_4-2x_5 & = & -1 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2-x_3+x_4 & = & 3 \\ 3x_1-4x_3+x_4 & = & 0 \\ x_1-x_2+x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 6. Résoudre les deux systèmes suivants.

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+x_3-3x_4 & = & -1 \\ 4x_1+2x_2-4x_3+6x_4 & = & 4 \\ -2x_1+x_2+x_3+x_4 & = & -5 \\ 6x_1+5x_2-x_3+x_4 & = & -3 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+x_3-3x_4 & = & 1 \\ 4x_1+2x_2-4x_3+6x_4 & = & 2 \\ -2x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 3 \\ 6x_1+5x_2-x_3+x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 7.
Déterminer un polynôme à coefficients réels P de degré 2 tel que $P(-1)=0$, $P(1)=1$ et $P(2)=2$.

Calcul matriciel I : Multiplication et autres opérations sur les matrices

Exercice 8. On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $AB \equiv A \cdot B$, le produit de la matrice A et B. Calculer également BA. Comparer les résultats.
2. Calculer $\operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(B)$, les traces des matrices A et B. Calculer également $\operatorname{tr}(AB)$ et $\operatorname{tr}(BA)$ et comparer.
3. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$, les déterminants de ces matrices.
4. Vérifier par le calcul explicite que $\det(AB)=\det(BA)$. Comparer avec $\det(A)\cdot\det(B)$.
5. Calculer les matrices transposées des matrices A et B, puis $A^T \cdot B^T$ et $\det(A^T)$. Que peut-on remarquer en comparant avec les resultats ?

Exercice 9. On définit les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ;\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix} ;\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ;\ D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} ;\ E=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} ;\ F=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les quantités suivantes, dire lesquelles sont bien définies et les calculer :

$$A+B\ ;\ A+F\ ;\ A+2F\ ;\ F-I_2\ ;\ AB\ ;\ BA\ ;\ BC\ ;\ CB\ ;\ DE\ ;\ AE\ ;\ EA\ ;\ AF$$

Exercice 10. Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Décider lesquelles des sommes $A+B$, $B+A$, $A+C$, $C+A$, $A+D$, $D+A$, $B+C$, $C+B$, $B+D$, $D+B$, $C+D$ et $D+C$ sont bien définies et les calculer dans ce cas.
2. Décider lesquels des produits AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD et DC sont bien définies et les calculer dans ce cas.

Exercice 11. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
2. Calculer $(A+B)^2$.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$. Que peut-on remarquer ?
4. Quelle est la formule générale de $(A+B)^2$ pour A et B deux matrices carrées quelconques ?
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $AB = BA$, montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$
On rappelle que pour $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et que $0! := 1$.

Exercice 12. Trouver A et B des matrices telles que $A \neq \mathbb{0}$, $B \neq \mathbb{0}$ et $A \cdot B = \mathbb{0}$.

Exercice 13. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner $(AB)_{i,i}$ le coefficient à la ligne i, colonne i de la matrice AB.
2. En déduire la formule de $\mathrm{tr}(AB)$.
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. En déduire que $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB)$.
5. Si A est inversible. Montrer que $\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = tr(B)$.
6. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calculer $\mathrm{tr}(ABC)$ et $\mathrm{tr}(BAC)$, que peut-on remarquer ?

Calcul matriciel II : Inverses de matrices

Exercice 14. En utilisant des opérations élémentaires, calculer les inverses des matrices suivantes ou conclure qu'elles ne sont pas inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant des matrices A, B et C et ensuite leur inverses lorsque c'est possible.
Indication: Comparer la matrice C avec la matrice A.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'inverse de A.
2. Réécrire le système suivant sous forme matricielle et le résoudre en utilisant A^{-1}.

$$\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{cases}$$

Exercice 17. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.

1. Soient A et B de matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Soient A, B et C trois matrices inversibles. Donner la matrice réciproque de ABC ?
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $AB = \mathbb{1}_n$. Montrer que $B = A^{-1}$.
4. Trouver A et B deux matrices telles que $A \cdot B = \mathbb{1}$ et $B \cdot A \neq \mathbb{1}$.
   Indication: Si A et B sont des matrices carrées alors : $A \cdot B = \mathbb{1} \iff B \cdot A = \mathbb{1}$.

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Executer l'algorithm de Gauss-Jordan et déterminer l'inverse de A.
2. On note $P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A_2 = P_{1,2} \cdot A$. Que remarque-t-on ?
3. On note $D_1(1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A_3 = D_1(1/2) \cdot A_2$. Que remarque-t-on ?
4. Continuer le raisonnement avec les matrices :
   $$T_{3,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ T_{3,2}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D_3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
5. Puis avec les matrices : $T_{1,3}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T_{1,2}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. En utilisant la question 3 de l'exercice 18 montrer que :
   $$T_{1,2}(-1) \cdot T_{1,3}(1) \cdot D_3(-1) \cdot T_{3,2}(-1) \cdot T_{3,1}(3) \cdot D_1(1/2) \cdot P_{1,2}$$
   est l'inverse de A.

Remarque : Ce produit revient à faire les opérations élémentaires faites sur A, sur la matrice identité, ce qui montre bien que l'algorithme de Gauss Jordan fonctionne et donne bien l'inverse de A.

Calcul matriciel III : Puissances de matrices et applications

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour $n = 1, 2, 3, 4$
2. Déviner une formule pour A^n, $n \geq 1$ et la montrer par récurrence.

Exercice 21. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - \mathbb{1}_3$.
2. Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et $\mathbb{1}_3$.

Exercice 22 (CC1 2021)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Montrer par récurrence sur n : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que $A^2 - 3A + 2\mathbb{1}_2 = 0$.
4. Utiliser cette formule pour montrer que A et inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A et de $\mathbb{1}_2$.

Exercice 23. On pose $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. S'il existe, déterminer l'inverse de A.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **24.**

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de P, en déduire que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :
$$\begin{cases} a_{n+1} & = & -a_n & - & 2b_n \\ b_{n+1} & = & 3a_n & + & 4b_n \end{cases}, \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer a_n et b_n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u> 25.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de P, en déduire que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :
$$\begin{cases} a_{n+1} & = & a_n & + & 2b_n \\ b_{n+1} & = & 4a_n & + & 3b_n \end{cases}, \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer a_n et b_n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 26. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2\mathbb{1}_3 + J$.
2. Calculer J^2, J^3 puis, pour tout $n \geq 4$, J^n.
3. En utilisant la question 5 de l'exercice 11, calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. (a) Déterminer une matrice $J \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que $A = \mathbb{1}_2 + J$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) A l'aide de la question 5 de l'exercice 11, en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On considère $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de n.