Correction première session 2022

Exercice 1. 3 points

On considère l'application $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$u(x,y,z) = (x - 3y + 3z, 2x - 7y + 8z, x - 4y + 5z)$$

a. 0,5 point. Montrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. 0,5 point. Quelle est la matrice de $u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ?

c. 1 point. Donner une base du noyau de $u$.

d. 0,5 point. Quel est le rang de $u$.

e. 0,5 point. Donner une base de l'image de $u$.

Correction exercice 1

a. Soient $(x,y,z)$, $(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda, \lambda'$ deux réels

$$\lambda(x,y,z) + \lambda'(x',y',z') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$

Donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') \\ &= \big(\lambda x + \lambda' x' - 3(\lambda y + \lambda' y') + 3(\lambda z + \lambda' z'), 2(\lambda x + \lambda' x') - 7(\lambda y + \lambda' y') \\ &+ 8(\lambda z + \lambda' z'), \lambda x + \lambda' x' - 4(\lambda y + \lambda' y') + 5(\lambda z + \lambda' z')\big) \\ &= \big(\lambda(x - 3y + 3z) + \lambda'(x' - 3y' + 3z'), \lambda(2x - 7y + 8z) \\ &+ \lambda'(2x' - 7y' + 8z'), \lambda(x - 4y + 5z) + \lambda'(x' - 4y' + 5z')\big) \\ &= \lambda(x - 3y + 3z, 2x - 7y + 8z, x - 4y + 5z) \\ &+ \lambda'(x' - 3y' + 3z', 2x' - 7y' + 8z', x' - 4y' + 5z') = \lambda u(x,y,z) + \lambda' u(x',y',z') \end{aligned}$$

Ce qui montre que $u$ est linéaire, comme $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b.

$$\begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 2x - 7y + 8z \\ x - 4y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -7 & 8 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice de $u$ dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -7 & 8 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

c.

$$(x,y,z) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 7y + 8z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - 3y + 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 3z = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$(x,y,z) = (3z, 2z, z) = z(3,2,1)$$

$$\ker(u) = \mathrm{Vect}\big((3,2,1)\big)$$

d. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \mathrm{rg}(u) = 3 - 1 = 2$$

e.

$$u(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \text{ et } u(e_2) = -3e_1 - 7e_2 - 4e_3$$

Ces deux vecteurs forment une famille libre (car ils ne sont pas proportionnels) de l'image de $u$, comme $\dim(Im(u)) = 2$, il forment une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 2. 3,5 points

Soient $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

a. 0,5 point. Montrer que $P$ est inversible et calculer son inverse.

b. 1 point. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis $D^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = -3a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 10a_n + 6b_n \end{cases}, \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

(a) 1 point. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) 1 point. Calculer $a_n$ et $b_n$ explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Correction exercice 2

a. $\det(P) = 1 \times 5 - (-2) \times (-2) = 1 \neq 0$ donc $P$ est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent pour tout $n \geq 0$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

c.

(a) On a

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pour $n = 0$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la relation est vraie pour $n = 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = AA^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la relation au rang $n$ entraine celle au rang $n+1$, on a montré par récurrence que pour tout $n \geq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} \\ -2 & 5 \times 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 - 2^{n+2} & 2 - 2^{n+1} \\ -10 + 10 \times 2^n & -4 + 5 \times 2^n \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2^{n+2} + 2 - 2^{n+1} \\ -10 + 10 \times 2^n - 4 + 5 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 3 \times 2^{n+1} \\ -14 + 15 \times 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 3. 3 points

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}(X^3 - X - 1, X^2 + 1)$$

a. 0,5 point. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. 1 point. Déterminer une base de $F$.
Indication : si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, quelles sont les équations que les réels $a, b, c, d$ doivent satisfaire pour que $P \in F$ ?

c. 1,5 points. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction exercice 3

a. Soient $P, Q$ deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, soient $\lambda, \mu$ deux réels
Le polynôme nul vérifie ces deux conditions et d'autre part

$$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$$
$$(\lambda P + \mu Q)'(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = 0$$

Donc $F$ est un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$

$$P' = 3aX^2 + 2bX + c$$

Donc

$$\begin{cases} P(0)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=-3a-2b \end{cases} \Leftrightarrow P=aX^3+bX^2+(-3a-2b)X$$
$$=a(X^3-3X)+b(X^2-2X)$$

Les polynômes $X^3-3X$ et $X^2-2X$ engendrent $F$ et ils ne sont pas proportionnels donc ils forment une base de $F$.

c. Comme les polynômes qui engendrent $G$ ne sont pas proportionnels la dimension de $G$ est 2, d'après la question b. la dimension de $F$ est 2 on a

$$\dim(F)+\dim(G)=2+2=4=\dim(\mathbb{R}_3[X])$$

Soit $P \in G$, il existe $\lambda, \mu$ réels tels que

$$P=\lambda(X^3-X-1)+\mu(X^2+1)=\lambda X^3+\mu X^2-\lambda X-\lambda+\mu$$
$$P'=3\lambda X^2+2\mu X-\lambda$$

Si de plus $P \in F$

$$\begin{cases} P(0)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda+\mu=0 \\ 3\lambda+2\mu-\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\mu \\ 5\mu-\mu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\mu=0$$

On en déduit que $F \cap G=\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$ puis que

$$F \oplus G=\mathbb{R}_3[X]$$

Ils sont donc supplémentaires.

Exercice 4. 3 point.

a. 0,5 point. Factoriser le polynôme suivant

$$P(X)=X^3-X^2+X-1$$

b. 1 point. Donner la décomposition en élément simple sur $\mathbb{R}$ de la fonction rationnelle suivante

$$F(X)=\frac{3X+1}{X^3-X^2+X-1}.$$

c. 1,5 points. Calculer

$$I=\int_2^3 F(x)dx.$$

Correction exercice 4

a. Soit par division euclidienne de $P(X)$ par $X-1$, soit par petite intuition

$$P(X)=X^2(X-1)+1\times(X-1)=(X^2+1)(X-1)$$

b. Il existe $a,b,c$ trois réels tels que

$$F(X)=\frac{3X+1}{(X-1)(X^2+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+1}$$

On multiplie cette égalité par $X-1$, puis $X=1$

$$a=\left[\frac{3X+1}{X^2+1}\right]_{X=1}=\frac{4}{2}=2$$

On multiplie par $X^2+1$, puis $X=i$

$$bi+c=\left[\frac{3X+1}{X-1}\right]_{X=i}=\frac{3i+1}{i-1}=\frac{(3i+1)(-i-1)}{2}=\frac{3-3i-i-1}{2}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$$

Donc $b=-2$ et $c=1$ on en déduit la décomposition en éléments simples

$$F(X)=\frac{3X+1}{X^3-X^2+X-1}=\frac{2}{X-1}+\frac{-2X+1}{X^2+1}$$

c.

$$I=\int_2^3\left(\frac{2}{x-1}+\frac{-2x+1}{x^2+1}\right)dx=2\int_2^3\frac{dx}{x-1}-\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_2^3\frac{dx}{x^2+1}$$
$$=2[\ln|x-1|]_2^3-[\ln(x^2+1)]_2^3+[\arctan(x)]_2^3$$
$$=2(\ln(2)-\ln(1))-(\ln(10)-\ln(5))+\arctan(3)-\arctan(2)$$
$$=2\ln(2)-\ln(10)+\ln(5)+\arctan(3)-\arctan(2)$$
$$=\ln(2)+\arctan(3)-\arctan(2)$$

Exercice 5. 1,5 points.

Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\, dx.$$

Correction exercice 5

Par partie en dérivant $x \to x^2$ et en intégrant $x \to \sin(x)$

$$I = [x^2(-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(-\cos(x))dx = 0 - 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\, dx$$

On intègre de nouveau par partie en dérivant $x \to x$ et en intégrant $x \to \cos(x)$

$$I = 2\left([x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi - 2$$

Exercice 6. 2 points.

En utilisant un développement limité, calculer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$

Correction exercice 6

On fait un développement limité de $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 4 en 0

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ donc $X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $o(X^2) = o(x^4)$

Alors

$$\ln(cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

On en déduit que

$$\frac{\ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{x^4}{12}}{x^4} = -\frac{1}{12} \underset{0}{\to} -\frac{1}{12}$$

Exercice 7. 2,5 points.

a. 0,5 point. Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0):\ y' - \frac{1}{2(x+1)}y = 0.$$

b. 1 point. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+t}$, calculer

$$\lambda(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt.$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$

c. 1 point. Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) :\ \ y' - \frac{1}{2(x+1)}y = x$$

Correction exercice 7

a.

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1}$$

Donc

$$\ln(y) = \frac{1}{2}\ln(x+1) + K, K \in \mathbb{R}$$

$$y = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(x+1)} = \lambda\sqrt{x+1}, \lambda \in \mathbb{R}$$

b.

$$u = \sqrt{t+1} \Leftrightarrow t = u^2 - 1$$

$$dt = 2udu$$

$$\frac{t}{\sqrt{1+t}} = \frac{u^2-1}{u}$$

$$t = 0 \Rightarrow u = 1 \text{ et } t = x \Rightarrow u = \sqrt{x+1}$$

$$\lambda(x) = \int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{u^2-1}{u} 2udu = 2\int_1^{\sqrt{x+1}} (u^2-1)du = 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^{\sqrt{x+1}}$$

$$= 2\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3} - \sqrt{x+1} - \frac{1}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - \sqrt{x+1} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - 1\right)\sqrt{x+1} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \frac{4}{3}$$

c. Il reste à trouver une solution particulière de $(E)$ sous la forme

$$y_P(x) = \lambda(x)\sqrt{x+1}$$

$$y_P'(x) = \lambda'(x)\sqrt{x+1} + \lambda(x)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

On remplace dans $(E)$

$$\lambda'(x)\sqrt{x+1} + \lambda(x)\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2(x+1)}\lambda(x)\sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow \lambda'(x)\sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

D'après la question b.

$$\lambda(x) = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \frac{4}{3}$$

Donc

$$y_P(x) = \left(\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \frac{4}{3}\right)\sqrt{x+1} = \frac{2}{3}(x-2)(x+1) + \frac{4}{3}\sqrt{x+1}$$

Et la solution générale de $(E)$ est

$$y(x) = \lambda\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}(x-2)(x+1) + \frac{4}{3}\sqrt{x+1}$$

Exercice 8. 1,5 points.

Déterminer la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

On prendra soin de donner une expression réelle de la solution.

Correction exercice 8

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

Donc les racines complexes sont $r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 1 + 2i$ la solution générale est donc

$$y(x) = e^x(\lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x)), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = e^x(\lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x)) + e^x(-2\lambda_1\sin(2x) + 2\lambda_2\cos(2x))$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

La solution du problème est :

$$y(x) = e^x(\cos(2x) + 2\sin(2x))$$