Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre printemps 2022**
L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Examen partiel du 27 avril 2022

Durée : 80 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

<u>Exercice 1</u> (3 pts)

1.(1.5 pts) Sans justifications, simplifier les expressions suivantes :

- **a.** $\arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right)$
- **b.** $\arccos\left(\sin\frac{5\pi}{2}\right)$
- **c.** $\arcsin\left(\sin\frac{23\pi}{6}\right)$

2.(1.5 pt) En utilisant la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et en justifiant :
Simplifier l'expression $\sin(\arccos x)$, $\forall x \in [-1; 1]$.

<u>Exercice 2</u> (3 pts) Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 e^x(3x^2 - x + 1)dx$$

<u>Exercice 3</u> (4 pts) On cherche à évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{3 - \cos x + 2\sin x}$$

- **a.** (1 pts) En utilisant le changement de variable $u = \tan(x/2)$ et donc : $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ et $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^2 + u + 1/2}$
- **b.** (3 pts) Évaluer I.

<u>Exercice 4</u> (2 pts)

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0; +\infty[$, pour la condition initiale $y(1) = 1$:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

Exercice 5 (4 pts)
Dans cet exercice, on considère l'équation différentielle suivante, pour la condition initiale suivante : $y(0) = -2$:

$$(E) : y' - 2y = \frac{e^{2x}}{1+x^2} - 3e^{-x} + 10$$

a. (0.5 pt) Donner la solution générale de l'équation homogène associée $y' - 2y = 0$.

b. (1 pt) Donner une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$

c. (1 pt) Donner une solution particulière de l'équation $y' - 2y = -3e^{-x}$

d. (0.5 pt) Donner une solution particulière de l'équation $y' - 2y = 10$

e. (1 pt) Résoudre (E), pour la condition initiale donnée, en précisant le principe utilisé.

Exercice 6 (4 pts)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - 4y' + 3y = (4x+5)e^{-x}$$

a. (2 pts) Donner une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = (ax+b)e^{-x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

b. (2 pts) Résoudre (E) pour les conditions initiales suivantes : $y(0) = 1/2$ et $y'(0) = 0$.

Question bonus (1 pt) : Donner les solutions générales des équations différentielles homogènes suivantes : $2y'' - 4y' + 3y = 0$ et $y'' - 4y' + 4y = 0$