Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre printemps 2022**
L1 | UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Examen partiel du 27 avril 2022

Durée : 80 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

Exercice 1 (3 pts)

1.(1.5 pts) Sans justifications, simplifier les expressions suivantes :

- **a.** $\arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$
- **b.** $\arccos\left(\sin\frac{5\pi}{2}\right) = 0$
- **c.** $\arcsin\left(\sin\frac{23\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$

2.(1.5 pt) En utilisant la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et en justifiant :
Simplifier l'expression $\sin(\arccos x)$, $\forall x \in [-1; 1]$.
SOLUTION : $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$

Exercice 2 (3 pts) Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 e^x(3x^2 - x + 1)dx$$

SOLUTION : $4e - 8$

Exercice 3 (4 pts) On cherche à évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{3 - \cos x + 2\sin x}$$

- **a.** (1 pts) En utilisant le changement de variable $u = \tan(x/2)$ et donc $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ et $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^2 + u + 1/2}$
- **b.** (3 pts) Évaluer I.

SOLUTION : $I = 2\arctan 3 - \frac{\pi}{2}$

Exercice 4 (2 pts)

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0; +\infty[$, pour la condition initiale $y(1) = 1$:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

SOLUTION : $y = \frac{x^3}{2} + Cx = \frac{x^3 + x}{2}$

Exercice 5 (4 pts)

Dans cet exercice, on considère l'équation différentielle suivante, pour la condition initiale suivante : $y(0) = -2$:

$$(E) : y' - 2y = \frac{e^{2x}}{1+x^2} - 3e^{-x} + 10$$

a. (0.5 pt) Donner la solution générale de l'équation homogène associée $y' - 2y = 0$.
SOLUTION : $y = Ce^{2x}$

b. (1 pt) Donner une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$
SOLUTION : $y = e^{2x} \cdot \arctan x$

c. (1 pt) Donner une solution particulière de l'équation $y' - 2y = -3e^{-x}$
SOLUTION : $y = e^{-x}$

d. (0.5 pt) Donner une solution particulière de l'équation $y' - 2y = 10$
SOLUTION : $y = -5$

e. (1 pt) Résoudre (E), pour la condition initiale donnée, en précisant le principe utilisé.
SOLUTION : $y = 2e^{2x} + e^{2x} \cdot \arctan x + e^{-x} - 5$

Exercice 6 (4 pts)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - 4y' + 3y = (4x+5)e^{-x}$$

a. (2 pts) Donner une solution particulière de (E), de la forme $y(x) = (a \cdot x + b)e^{-x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
SOLUTION : $y = (\frac{x}{2} + 1)e^{-x}$

b. (2 pts) Résoudre (E) pour les conditions initiales suivantes : $y(0) = 1/2$ et $y'(0) = 0$.
SOLUTION : $y = \frac{e^{3x}}{2} - e^{x} + (\frac{x}{2} + 1)e^{-x}$

Question bonus (1 pt) : Donner les solutions générales des équations différentielles homogènes suivantes : $2y'' - 4y' + 3y = 0$ et $y'' - 4y' + 4y = 0$
SOLUTION : $y = C_1 e^{x} \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}) + C_2 e^{x} \cos(\frac{x}{\sqrt{2}})$ et $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$