Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre printemps 2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Examen partiel du 23 mars 2022

Durée : 80 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

<u>Exercice 1</u> (3 pts)

Dire si les applications suivantes sont linéaires ; répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve. (6 réponses correctes donnent 3 points, 5 réponses correctes donnent 2 points, 4 donnent 1 point, 0 point sinon).

a. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x+1$

b. $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)$

c. $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \det(A)$

d. $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A$

e. $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[X],\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)(X^2+2X+1)$

f. $\Psi\colon C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'' + f(2)$

Remarques sur la notation : tr représente la trace de la matrice, det son déterminant, $\cdot$ denote la multiplication matricielle et f'' est la derivée seconde de la fonction f.

SOLUTION : Si f est une application linéaire alors $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ avec λ un réel , x et y appartenant à l'ensemble de définition de f.

a. Non. $f(0) = 1$.

b. Oui. $f(A+\lambda B) = tr(A+\lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda \mathrm{tr}(B)$: linéarité de la trace.

c. Non. $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$, en contradiction avec la linéarité lorsque $\det(A) \neq 0$.

d. Oui. $$\begin{aligned} f(A+\lambda B) &= (A+\lambda B)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}(A+\lambda B) \\ &= \left(A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}A\right) + \lambda\left(B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}B\right) \end{aligned}$$

e. Oui. Toujours la linéarité de la trace.

f. Oui. $f(g+\lambda h) = (g+\lambda)'' + (g+h)(2) = (g'' + g(2)) + \lambda(h'' + h(2))$

Exercice 2 (3 pts) Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ la base $((-1,2),(3,-5))$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x, 7x+5y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a. (0.5 pts) Trouver la matrice $P \equiv P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ qui transforme un vecteur de $\mathcal{B}$ en un vecteur de $\mathcal{E}$ telle que $[v]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ pour tous les vecteurs $v \in \mathbb{R}^2$.

b. (0.5 pts) Déterminer P^{-1}.

c. (0.5 pts) Trouver $A := [f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \equiv [f]_{\mathcal{E}}$, la matrice qui correspond à f dans la base $\mathcal{E}$.

d. (1.5 pts) Trouver $B := [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \equiv [f]_{\mathcal{B}}$, la matrice qui correspond à f dans la base $\mathcal{B}$.

SOLUTION :

a. $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

b. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

d. $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (5 pts) On considère l'application

$$\Psi \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P \mapsto 2XP + (X - X^2)P'\,.$$

On note $\mathcal{E}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. (1 pt) Montrer que Ψ est une application linéaire.

b. (1 pt) Déterminer la matrice A associée à Ψ dans les bases canoniques, $A \equiv [\Psi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

c. (1.5 pts) Déterminer une base de $\ker(A)$ et en déduire une base du noyau $\ker(\Psi) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

d. (1.5 pts) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ et en déduire une base de l'image $\mathrm{Im}(\Psi) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

SOLUTION :

a. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$; on a
$\Psi(\lambda P + Q) = 2X(\lambda P + Q) + (X - X^2)(\lambda P + Q)' = 2X(\lambda P + Q) + (X - X^2)(\lambda P' + Q') = \lambda \Psi(P) + \Psi(Q)$.

b. $\Psi(1) = 2X$; $\Psi(X) = X + X^2$; $\Psi(X^2) = 2X^2$.
D'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. $(a,b,c) \in \ker(A) \iff A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a + b &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= -2a \\ c &= a \end{cases}$

Donc

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}\{(1,-2,1)\} \text{ et } \ker(\Psi) = \mathrm{Vect}\{1 - 2X + X^2\}$$

d. On a d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rang}(A) = 2$$

Ensuite la première et la troisième colonne de A fournissent une base de $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{(0,2,0,0),(0,0,2,0)\} = \mathrm{Vect}\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

On en déduit que (X, X^2) est une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Exercice 4 (2 pts)
Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ le polynôme suivant.

$$P(X) = X^3 - X^2 - 4$$

SOLUTION :

On a $P(2) = 0$. Donc 2 est une racine de P. Il existe un unique polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-2)\,Q$. En effectuant la division euclidienne de P par $X-2$, on obtient $Q = X^2 + X + 2$.
Q admet un discriminant strictement négatif ; il est donc irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. Ainsi

$$P = (X-2)(X^2 + X + 2)$$

est la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.
Q admet deux racines complexes conjuguées $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$. D'où la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$:

$$P = (X-2)(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2})$$

Exercice 5 (2 pts)
Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante.

$$F(X) = \frac{X-2}{X^2 - 2X - 3}$$

SOLUTION :

$$\frac{X-2}{X^2 - 2X - 3} = \frac{3}{4(X+1)} + \frac{1}{4(X-3)}$$

Exercice 6 (5 pts)
Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante.

$$F(X) = \frac{2X+4}{(X^2 + 2X + 1)(X^2 + 1)}$$

SOLUTION :

$$\frac{2X+4}{(X^2 + 2X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1-2X}{X^2+1}$$