**Université Claude Bernard - Lyon 1** — **Semestre printemps 2022**

L1 — UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

---

**Examen partiel du 23 mars 2022**

Durée : 80 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

---

**<u>Exercice 1</u>** (3 pts)

Dire si les applications suivantes sont linéaires; répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve. (6 réponses correctes donnent 3 points, 5 réponses correctes donnent 2 points, 4 donnent 1 point, 0 point sinon).

**a.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 1$

**b.** $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \operatorname{tr}(A)$

**c.** $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \det(A)$

**d.** $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A$

**e.** $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[X],\ A \mapsto \operatorname{tr}(A)(X^2 + 2X + 1)$

**f.** $\Psi : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'' + f(2)$

*Remarques sur la notation :* tr représente la trace de la matrice, det son déterminant, $\cdot$ denote la multiplication matricielle et $f''$ est la derivée seconde de la fonction $f$.

**<u>Exercice 2</u>** (3 pts) Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ la base $((-1, 2), (3, -5))$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x, 7x + 5y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**a.** (0.5 pts) Trouver la matrice $P \equiv P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ qui transforme un vecteur de $\mathcal{B}$ en un vecteur de $\mathcal{E}$ telle que $[v]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ pour tous les vecteurs $v \in \mathbb{R}^2$.

**b.** (0.5 pts) Déterminer $P^{-1}$.

**c.** (0.5 pts) Trouver $A := [f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \equiv [f]_{\mathcal{E}}$, la matrice qui correspond à $f$ dans la base $\mathcal{E}$.

**d.** (1.5 pts) Trouver $B := [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \equiv [f]_{\mathcal{B}}$, la matrice qui correspond à $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

**<u>Exercice 3</u>** (5 pts) On considère l'application

$$\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P \mapsto 2XP + (X - X^2)P' .$$

On note $\mathcal{E}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

**a.** (1 pt) Montrer que $\Psi$ est une application linéaire.

**b.** (1 pt) Déterminer la matrice $A$ associée à $\Psi$ dans les bases canoniques, $A \equiv [\Psi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

**c.** (1.5 pts) Déterminer une base de $\ker(A)$ et en déduire une base du noyau $\ker(\Psi) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

**d.** (1.5 pts) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(A)$ et en déduire une base de l'image $\operatorname{Im}(\Psi) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

**Exercice 4** (2 pts)
Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ le polynôme suivant.

$$P(X) = X^3 - X^2 - 4$$

**Exercice 5** (2 pts)

Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante.

$$F(X) = \frac{X-2}{X^2 - 2X - 3}$$

**Exercice 6** (5 pts)

Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante.

$$F(X) = \frac{2X+4}{(X^2+2X+1)(X^2+1)}$$