
Examen partiel du 2 mars 2022 (Corrigé)

Durée : 80 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

Questions de cours (2 pts)

a. (1 pt) Soit F un sous-ensemble d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Quelles sont les conditions pour que F forme un sous-espace vectoriel de E ?

b. (1 pt) Donner la définition d'une application linéaire.

SOLUTION :

a. Pour que $F \subset E$ soit un sous-espace vectoriel de E, il faut qu'il vérifie :
— $0_E \in F$
— $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$
— $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in F$
(Les deux derniers points peuvent être remplacés par : $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + y \in F$.)

b. Un application linéaire entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F est une application $\varphi : E \to F$ vérifiant :
— $\forall x, y \in E$, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
— $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.
(Ces deux points peuvent être remplacés par : $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x+y) = \lambda\varphi(x)+\varphi(y)$.)

Exercice 1 (4 pts) Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

SOLUTION : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (3 pts)
Les ensembles suivants sont des sous-ensembles d'espaces vectoriels, comme spécifiés par les conditions données. Lesquels d'entre eux sont des sous-espaces vectoriels ?
Répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve. (6 réponses correctes donnent 3 points, 5 réponses correctes donnent 2 points, 4 donnent 1 point, 0 point sinon).

a. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \text{ ou } y = -x\}$

b. $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 1\}$

c. $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ commute avec } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

d. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) < 2\}$

e. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leqslant 2\}$

f. $\{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f''(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$

Remarques sur la notation : tr représente la trace de la matrice, deux matrices A et B commutent si $A \cdot B = B \cdot A$, deg est le degré du polynôme et f'' la derivée seconde de la fonction f.

SOLUTION :

a. Non. ($(1,1)$ et $(1,-1)$ sont dans l'ensemble mais pas leur somme $(2,0)$.
Remarque : il s'agit ici d'une union d'espaces vectoriels, ce qui n'est généralement pas un espace vectoriel.)

b. Non (ne contient pas la matrice nulle).

c. Oui (remarque : c'est le noyau de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)A \end{array}$).

d. Oui (remarque : c'est $\mathbb{R}_1[X]$).

e. Oui (remarque : c'est $\mathbb{R}_2[X]$).

f. Oui (remarque : c'est le noyau de $\varphi : \begin{array}{ccc} C^2(\mathbb{R}) & \to & C^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' - f \end{array}$).

<u>**Exercice 3**</u> (4 pts)

a. (3 pts) Résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

b. (1 pt) Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ formé des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ solution de (S).

SOLUTION

a.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 10x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 & \leftarrow L_1 - L_2 \\ 5x_2 - 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 & \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 & \leftarrow 1/2L_2 \\ 0 = 0 & \leftarrow 2L_3 - L_3 \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} x_1 = 1/5(\lambda - 8\mu - 4\nu) \\ x_2 = 1/5(3\lambda + \mu + 3\nu) \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \\ x_5 = \nu \end{cases} \quad \text{pour } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

b. Une base de F peut par exemple être construite en prendant $(\lambda, \mu, \nu) = (5, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ puis $(0, 0, 5)$. Cela donne la base :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (4 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. (1 pt) Trouver l'inverse de la matrice P.

b. (1.5 pts) Calculer $D = P^{-1}AP$ et ensuite D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

c. (1.5 pts) En déduire A^n.

SOLUTION :

a. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

b. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

c. $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence immédiate).

Ainsi : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & 2^n - 3^n \\ 2 \times 3^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$

Exercice 5 (3 pts)

a. (1 pt) Montrer que l'ensemble $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. (1 pt) Trouver une base de E.

c. (1 pt) On note $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbb{1}_2$.
Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

SOLUTION :

a. $\mathbb{0} \in E$. Si $A, B \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{tr}(\lambda A + B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0$, et ainsi $\lambda A + B \in E$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(Remarque : on peut également voir que la trace est une application linéaire $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et E est son noyau.)

b. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. En effet, c'est une famille libre de E et comme $E \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il est au plus de dimension 3. Donc $\dim E = 3$ et cette famille est une base de E.

c. $\mathbb{1}_2 \notin E$ donc $E \cap F = \{0\}$. E et F sont donc en somme directe et $\dim(E \oplus F) = \dim E + \dim F = 3 + 1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $E \oplus F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.