Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre printemps 2022**
L1 | UE : Fondamentaux des mathématiques (INFO)

Examen partiel du 2 mars 2022

Durée : 80 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

Questions de cours (2 pts)

- **a.** (1 pt) Soit F un sous-ensemble d'un espace vectoriel E. Quelles sont les conditions pour que F forme un sous-espace vectoriel de E ?
- **b.** (1 pt) Donner la définition d'une application linéaire.

Exercice 1 (4 pts) Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (3 pts)

Les ensembles suivants sont des sous-ensembles d'espaces vectoriels, comme spécifiés par les conditions données. Lesquels d'entre eux sont des sous-espaces vectoriels ?

Répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve. (6 réponses correctes donnent 3 points,
5 réponses correctes donnent 2 points, 4 donnent 1 point, 0 point sinon).

- **a.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \text{ ou } y = -x\}$
- **b.** $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 1\}$
- **c.** $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ commute avec } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$
- **d.** $\{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) < 2\}$
- **e.** $\{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leqslant 2\}$
- **f.** $\{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f''(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$

Remarques sur la notation : tr représente la trace de la matrice, deux matrices A et B commutent si $A \cdot B = B \cdot A$, deg est le degré du polynôme et f'' la derivée seconde de la fonction f.

Exercice 3 (4 pts)

- **a.** (3 pts) Résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- **b.** (1 pt) Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ formé des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ solution de (S).

<u>Exercice 4</u> (4 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. (1 pt) Trouver l'inverse de la matrice P.

b. (1.5 pts) Calculer $D = P^{-1}AP$ et ensuite D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

c. (1.5 pts) En déduire A^n.

<u>Exercice 5</u> (3 pts)

a. (1 pt) Montrer que l'ensemble $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. (1 pt) Trouver une base de E.

c. (1 pt) On note $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbb{1}_2$.
Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.