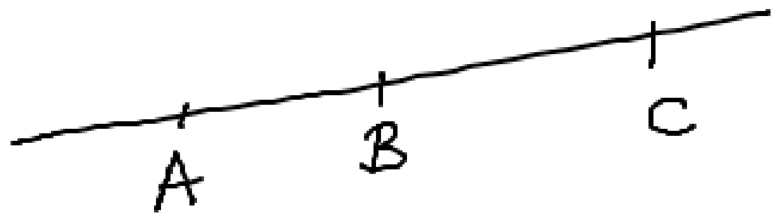
Le théorème de Thalès

* Rapports vectoriels (ou mesures algébriques)

$\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ $\qquad$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\qquad$ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{avec } \lambda \in K$$

et on pose $\boxed{\dfrac{\vec{u}}{\vec{v}} = \lambda}$



Rq. $(K = \mathbb{R})$

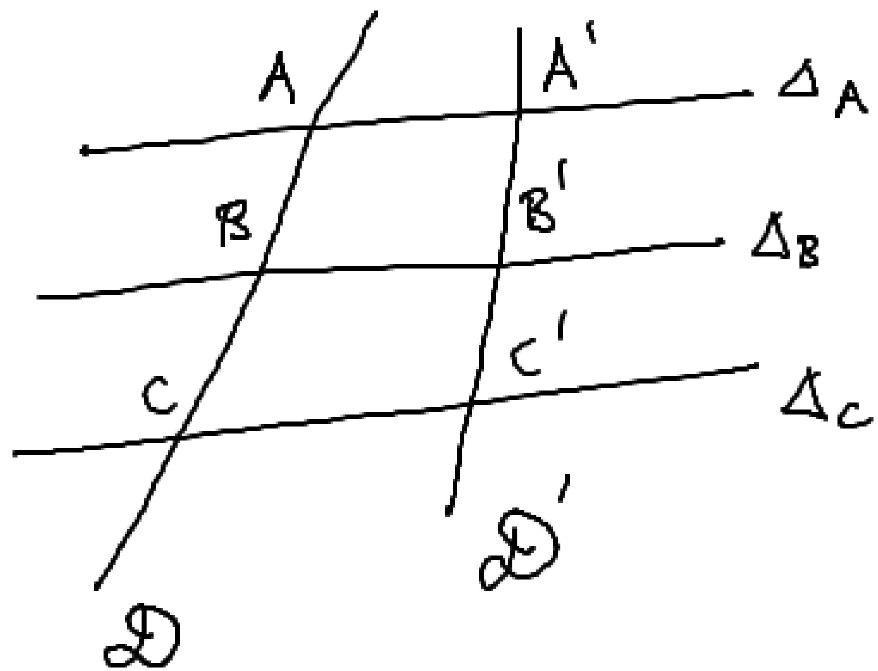
$\dfrac{\vec{AB}}{\vec{AC}} > 0 \iff$ B et C sont du même côté de A

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{AC}} \in K \qquad A \neq C$$

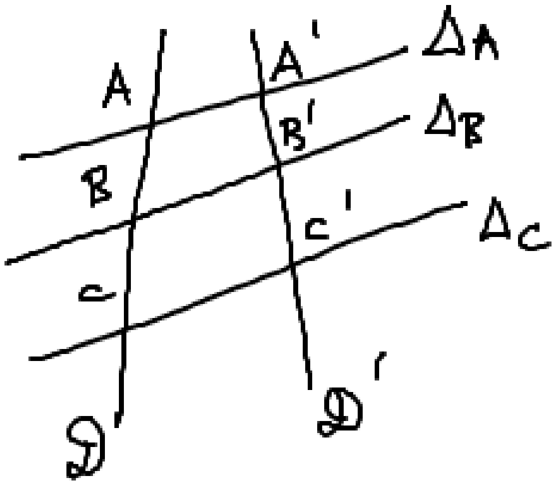
* Version générale du théorème de Thalès dans le plan

Thm – $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ trois droites parallèles

$\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites non parallèles à Δ_A.



$$\boxed{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}}$$



$\dim(\Sigma) = 2$

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta_A} = \vec{\Delta_B} = \vec{\Delta_C} \subset \vec{\Sigma}$$

$$\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{D}'} \neq \vec{\Delta}$$

$$\vec{\Sigma} = \underline{\vec{\Delta}} \oplus \underline{\vec{\mathcal{D}}} = \vec{\Delta} \oplus \vec{\mathcal{D}'}$$

$$\vec{A'C'} = \vec{A'A} + \vec{AC} + \vec{CC'} = \underline{(\vec{A'A} + \vec{CC'})} + \underline{\vec{AC}}$$

$$\vec{A'B'} = \vec{A'A} + \vec{AB} + \vec{BB'} = \underline{(\vec{A'A} + \vec{BB'})} + \underline{\vec{AB}} \quad \circledast$$

$\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$

$\vec{A'B'} = \lambda' \vec{A'C'}$

$$\vec{A'B'} = \boxed{(\vec{A'A} + \vec{BB'}) + \vec{AB}} \quad \circledast$$

2 décomp. du même vecteur

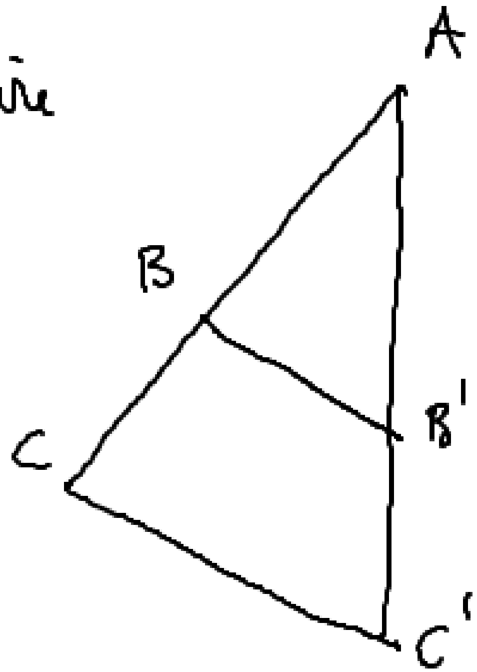
$$= \lambda'\left[(\vec{A'A} + \vec{CC'}) + \vec{AC}\right] = \boxed{\lambda'(\vec{A'A} + \vec{CC'}) + \lambda'\vec{AC}}$$

On en déduit : $\vec{AB} = \lambda'\vec{AC}$, donc $\lambda\vec{AC} = \lambda'\vec{AC}$

et $\boxed{\lambda = \lambda'}$.

* Cas particulier

Corollaire

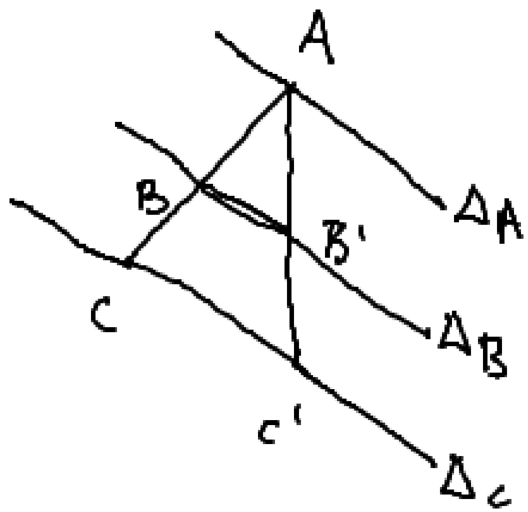


Si $(BB') \parallel (CC')$, alors

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} \overset{①}{=} \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}} \overset{②}{=} \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{CC'}}$$

Dém.

1



$\mathcal{D} = (AB)$

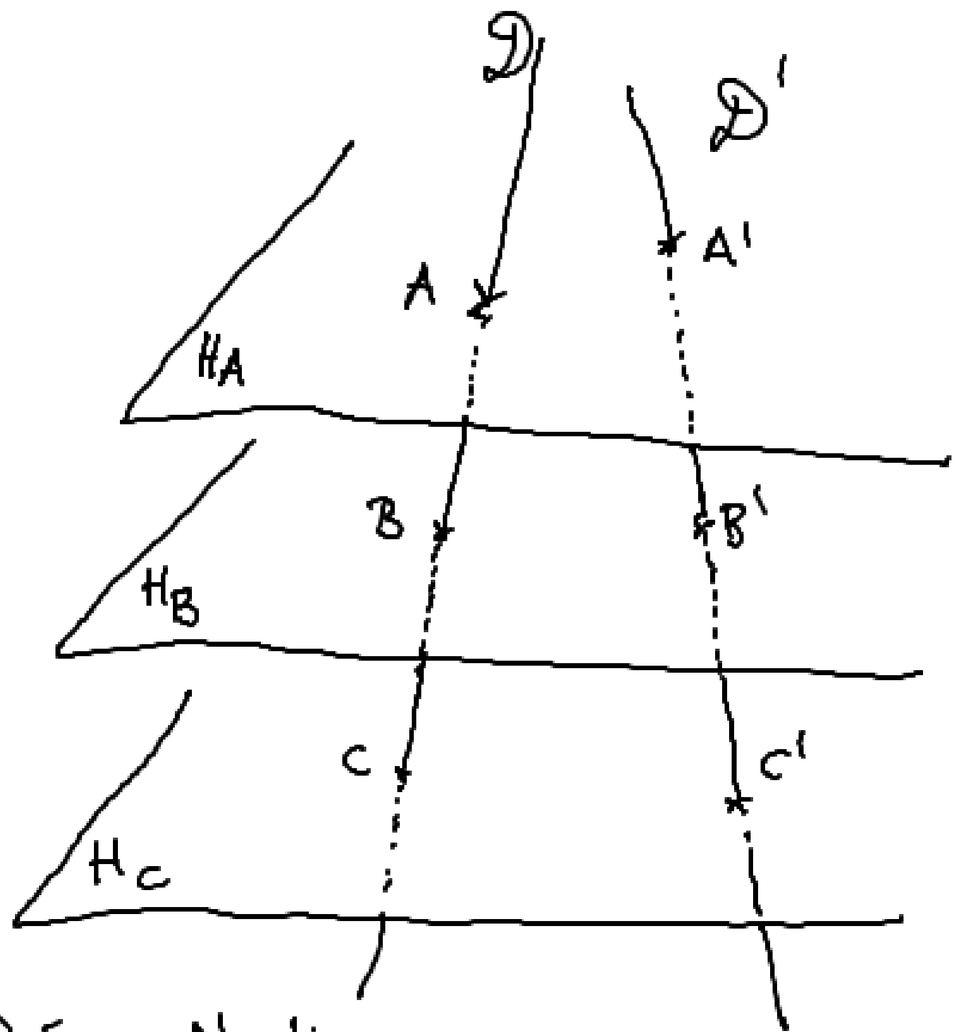
$\mathcal{D}' = (AB')$

$A' = A$

2 [Exercice].

* Généralisation en dim. qcq.

dim $\mathcal{E} = n$



H_A, H_B, H_C trois $\boxed{\text{hyperplans}}$ affines parallèles et distincts

$\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux dtes non faiblement // aux H.

$\dim H_A = \dim H_B = \dim H_C = n-1$

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}}$$

Démonstration : exercice.

$\square$