# Feuille 7

## Exercice 2 -

$V$ espace vectoriel euclidien.

$f$ isométrie : endomorphisme de $V$ tel que

$\forall u, v \in V, \quad (f(u) | f(v)) = (u|v)$

$f$ injective, donc $f$ bijective.

3) $f \in End(V)$ $\quad \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $V$

$f$ isométrie ssi $\forall i, j, \quad \big(f(e_i) | f(e_j)\big) = (e_i | e_j)$.

Matriciellement :

$$S = \left((e_i|e_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$ matrice du produit scalaire dans $\mathcal{B}$

$u, v \in V$ $\quad U$ = coordonnées de $u$ ds $\mathcal{B}$ $\quad U, Y \in \mathbb{R}^n$

$Y$ = coordonnées de $v$ ds $\mathcal{B}$

$$(u|v) = {}^tU S Y$$

$A$ = matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$

$$(f(u)|f(v)) = (u|v) \Leftrightarrow {}^t(AU)S(AY) = {}^tUSY \Leftrightarrow {}^tU{}^tASAY = {}^tUSY$$

$f$ isométrie ssi $\boxed{{}^tASA = S}$.

Cas particulier : $\mathcal{B}$ $\boxed{\text{orthonormée}}$, i.e. $S = I_n$

$f \in End(V)$ de matrice $A$ ds $\mathcal{B}$

$f$ isométrie $\iff$ ${}^tAA = I_n$

$\iff$ $A$ est une matrice <u>orthogonale</u>.

4) $A \in M_n(\mathbb{R})$

$${}^tAA = I_n \iff \forall i,j \in \{1, \dots, n\}, \quad [{}^tAA]_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\iff \forall i,j \in \{1, \dots, n\}, \quad {}^tC_i \cdot C_j = \delta_{ij}$$

$\iff$ les colonnes de $A$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

5) $f \in \mathrm{End}(V)$ isométrie $\boxed{\det(f) = \pm 1}$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $V$ et soit $A$ la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.

${}^tAA = I_n$ , donc $\det({}^tAA) = \det(I_n) = 1$

$$\det({}^tA)\det(A) = 1$$

$$\det(A)^2 = 1$$

$$\det(f) = \det(A) = \pm 1.$$

Conséquence : les isométries conservent les aires / les volumes.

6) $\dim(V) = 2$.

$O(V) = \{ f \in End(V) \mid f \text{ isométrie} \}$ $\qquad f \in O(V)$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $V$ et soit $A$ la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$0 = ac + bd = \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}$$

$${}^tAA = I_2 \iff \begin{cases} \boxed{a^2 + b^2 = 1} \\ c^2 + d^2 = 1 \\ \boxed{ac + bd = 0} \end{cases}$$

$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $a^2 + b^2 = 1$.

On en déduit :

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$ colinéaires $\iff \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

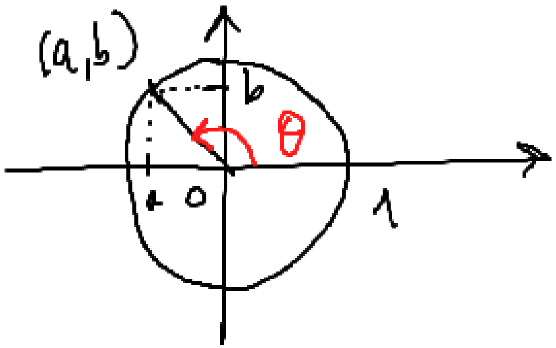
$$ {}^tAA = I_2 \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} $$

$$ \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \lambda^2 a^2+\lambda^2 b^2=1 \\ \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} $$

$$ \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \pm 1 \end{cases} $$

$$ \iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a^2+b^2=1 $$

$\det(A) = -1 < 0$ $\qquad$ $\det(A) = a^2+b^2 = 1 > 0$




$a^2+b^2=1$

$$\begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$

$\theta \in \mathbb{R}$ unique

modulo $2\pi$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ si $\det(A) = 1$ $\boxed{\text{Rotation}}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$ si $\det(A) = -1$. $\boxed{\text{Réflexion}}$

## Complément 1 : réflexions

$f \in O(V)$ $\quad \det(f) = -1$.

On a vu que, dans toute base orthonormée de $V$, la matrice de $f$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

Polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$

$$= X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$$

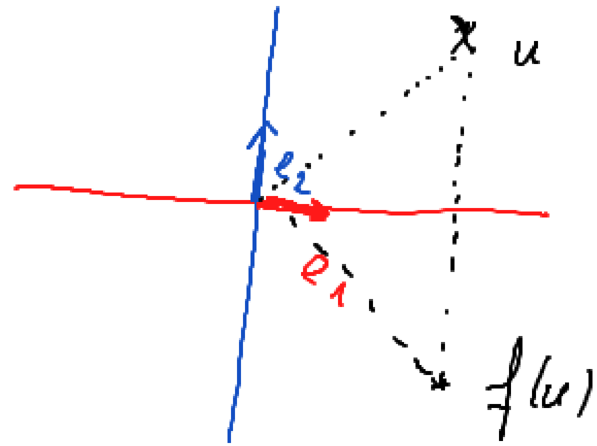
$f$ a deux valeurs propres : $1$ et $-1$

$f$ est donc diagonalisable dans une base $\{e_1, e_2\}$ avec $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = -e_2$. On choisit $e_1$ et $e_2$ unitaires.

$$(e_1 | e_2) = (f(e_1) | f(e_2))$$ car $f$ isométrie.

$$= (e_1 | -e_2)$$

$$= -(e_1 | e_2)$$




donc $(e_1 | e_2) = 0$.

La base $\{e_1, e_2\}$ est donc orthonormée. Dans cette base, la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $f \in O(V)$, $\det(f) = -1$.

Dans une base orthonormée bien choisie, la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$[\theta = 0]$

Complément 2 : rotations.

$f \in O(V)$, $\det(f) = 1$.

$\mathcal{B}$ base orthonormée de $V$

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

$g \in O(V)$, $\det(g) = 1$.

$$A' = Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}, \quad a'^2 + b'^2 = 1$$

$$Mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = AA' = \begin{pmatrix} \cos\theta . \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' & -\cos\theta \sin\theta' - \sin\theta \cos\theta' \\ \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta' & \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f\circ g) = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}.$$

Conséquences : $\ast \quad g\circ f = f\circ g$ donc les rotations en dim 2 commutent entre elles.

dim V = 2

$\ast \quad \mathbb{R} \longrightarrow O^+(V) = \{ f \in O(V) \mid \det(f) = 1 \} = \{\text{rotations de } V\}$

$\theta \longmapsto R_\theta$ = rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

est un morphisme de groupes

$$\boxed{R_{\theta+\theta'} = R_\theta \circ R_{\theta'} = R_{\theta'} \circ R_\theta}$$

Exercice 3 — $V$ espace vectoriel euclidien de dim finie

$$O(V) = \{ f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ isométrie} \} \subset GL(V)$$

1) $O(V)$ est un sous-groupe de $GL(V)$.

$f, g \in O(V)$

$$(f\circ g(u) \mid f\circ g(v)) = (f(g(u)) \mid f(g(v)))$$
$$= (g(u) \mid g(v))$$
$$= (u \mid v) \quad \text{pour tous } u, v \in V$$

donc $f \circ g \in O(V)$.

$(x|y) = (f(x)|f(y))$

$$(f^{-1}(u) \mid f^{-1}(v)) = (f(f^{-1}(u)) \mid f(f^{-1}(v))) = (u \mid v) \quad \text{" "}$$

donc $f^{-1} \in O(V)$.

2) $O(V)$ agit sur $V$ en préservant la norme.

$$\|f(u)\| = \|u\| \quad \text{pour } f \in O(V),\ u \in V.$$

Question : si $u, v \in V$ et $\|u\| = \|v\|$, existe-t-il $f \in O(V)$ telle que $v = f(u)$ ?

Réponse : oui !

* Supposons d'abord $\|u\| = \|v\| = 1$.

Pour obtenir $f$, on va construire deux bases orthonormées de $V$ ; $f$ sera la bijection de changement de base.

Considérons des bases $(e_1 = u, e_2, \dots, e_n)$ et $(e'_1 = v, e'_2, \dots, e'_n)$ de $V$. Par le procédé de Gram-Schmidt, on les transforme en des bases orthonormées $(\varepsilon_1 = u, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon'_1 = v, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ de $V$. La bijection linéaire $f$ définie par $f(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i$ $(1 \leq i \leq n)$ transforme une b.o.n. en une b.o.n, donc $f$ est une isométrie. Par construction, $f(u) = v$.

* Cas général : $\|u\| = \|v\|$.

$\frac{u}{\|u\|}$, $\frac{v}{\|v\|}$ unitaires, donc il existe $f \in O(V)$ tq. $f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$.

On en déduit : $\frac{1}{\|u\|} f(u) = \frac{v}{\|v\|}$ et $f(u) = v$.

On dit que $O(V)$ agit <u>transitivement</u> sur $\{v \in V \mid \|v\| = t\}$.

3) $(u,v)$, $(u',v')$ $\qquad \|u\| = \|v\| = \|u'\| = \|v'\| = 1$

<u>Question</u> : existe-t-il $f \in O(V)$ tq. $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$ ?

<u>CN</u> : $(u'|v') = (f(u)|f(v)) = (u|v)$ donc il faut nécessairement supposer $(u'|v') = (u|v)$.

<u>Réponse</u> : cette condition est suffisante

$$\boxed{\exists f \in O(V),\ f(u) = u' \text{ et } f(v) = v' \iff (u'|v') = (u|v).}$$

$\Rightarrow$ ok

$\Leftarrow$ On suppose $(u|v) = (u'|v')$.

* Cas particulier : $u$ et $v$ sont colinéaires, c'est-à-dire $u=v$ ou $u=-v$.

$$u=v \iff (u|v)=1 \iff (u'|v')=1 \iff u'=v'$$

$$u=-v \iff (u|v)=-1 \iff (u'|v')=-1 \iff u'=-v'.$$

À chaque fois, on considère $f \in O(V)$ telle que $f(u)=u'$. On a alors automatiquement $f(v)=v'$.

* Cas général : $u,v$ non colinéaires.

$u,v$ non colinéaires $\iff |(u|v)|<1 \iff |(u'|v')|<1 \iff u',v'$ non colinéaires.

On cherche à construire deux b.o.n. de $V$ contenant $u$ et $v$ d'une part, $u'$ et $v'$ d'autre part. Aucune chance si $(u|v) \neq 0$ !

Correction : appliquer Gram-Schmidt !

Première base : $(e_1 = u, e_2 = v, e_3, \dots, e_n) \overset{GS}{\rightsquigarrow} (\varepsilon_1 = u, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

$\downarrow f \in O(V)$

Seconde base : $(e_1' = u', e_2' = v', e_3', \dots, e_n') \underset{GS}{\rightsquigarrow} (\varepsilon_1' = u', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$

$$\varepsilon_2 = \frac{e_2 - (e_2|e_1)e_1}{\|e_2 - (e_2|e_1)e_1\|} = \frac{e_2 - (e_2|e_1)e_1}{\sqrt{1-(e_2|e_1)^2}} \; ; \quad \varepsilon_2' = \frac{e_2' - (e_2'|e_1')e_1'}{\sqrt{1-(e_2'|e_1')^2}} .$$

$$\|e_2 - (e_2|e_1)e_1\|^2 = \|e_2\|^2 + (e_2|e_1)^2\|e_1\|^2 - 2(e_2|e_1)^2 = 1 - (e_2|e_1)^2 .$$

$$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2'$$

$$\varepsilon_2 = \frac{e_2 - (e_2|e_1)e_1}{\sqrt{1-(e_2|e_1)^2}} = \frac{v - (u|v)u}{\boxed{\sqrt{1-(u|v)^2}}}$$

$$\varepsilon_2' = \frac{e_2' - (e_2'|e_1')e_1'}{\sqrt{1-(e_1'|e_2')^2}} = \frac{v' - (u'|v')u'}{\boxed{\sqrt{1-(u'|v')^2}}}.$$

donc

$$f\big(v - (u|v)u\big) = v' - (u'|v')u'$$

car $u' = f(u)$

$$f(v) - (u|v)f(u) = v' - (u'|v')f(u)$$

car $(u|v) = (u'|v')$

$$f(v) = v'$$

Conclusion: $f \in \mathcal{O}(V)$ et $f(u) = u'$, $f(v) = v'$

## Remarque

$$(u,v) \xrightarrow{\exists f \in O(V)} (u',v')$$

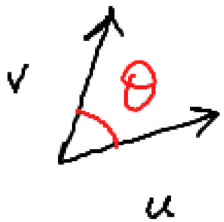
$\|u\| = \|v\| = 1$ $\qquad$ $\|u'\| = \|v'\| = 1$

ssi

$$(u|v) = (u'|v')$$

ssi

$$\theta = \theta'$$





$(u|v) = \cos\theta$ $\qquad$ $(u'|v') = \cos\theta'$

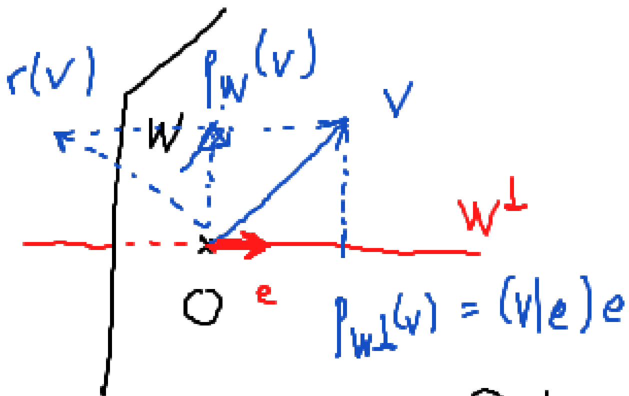
$\theta \in [0,\pi]$ $\qquad$ $\theta' \in [0,\pi]$

$$\boxed{\text{Angles géométriques}}$$

Exercice 4 — $V$ espace vectoriel euclidien de dim finie.

$W \subset V$ hyperplan $\qquad \dim(W^\perp) = 1$

La réflexion par rapport à $W$ est la symétrie orthogonale par rapport à $W$.




$$r = r_W$$

Soit $e \in W^\perp$ avec $\|e\| = 1$. $\qquad W^\perp = \mathbb{R}e$

$$p_W(v) = v - (v|e)e$$

$\frac{1}{2}(r(v)+v) = p_W(v)$ donc $r(v) = 2p_W(v) - v = 2(v-(v|e)e) - v = v - 2(v|e)e.$

$$\boxed{r(v) = v - 2(v|e)e}$$

Vérifions que $r$ est une isométrie :

$$\big(r(u) \,\big|\, r(v)\big) = \big(u - 2(u|e)e \,\big|\, v - 2(v|e)e\big)$$

$$= (u|v) - 2(u|e)(e|v) - 2(v|e)(u|e) + 4(u|e)(v|e)(e|e)$$

$$= (u|v) - 4(u|e)(v|e) + 4(u|e)(v|e)$$

$$= (u|v).$$

2) But : toute isométrie $f \in O(V)$ est une composée de réflexions

Autrement dit, les réflexions engendrent le groupe $O(V)$.

Soit $f \in O(V)$ $\qquad$ $\mathrm{Fix}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = v \}$

$$= \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_V).$$

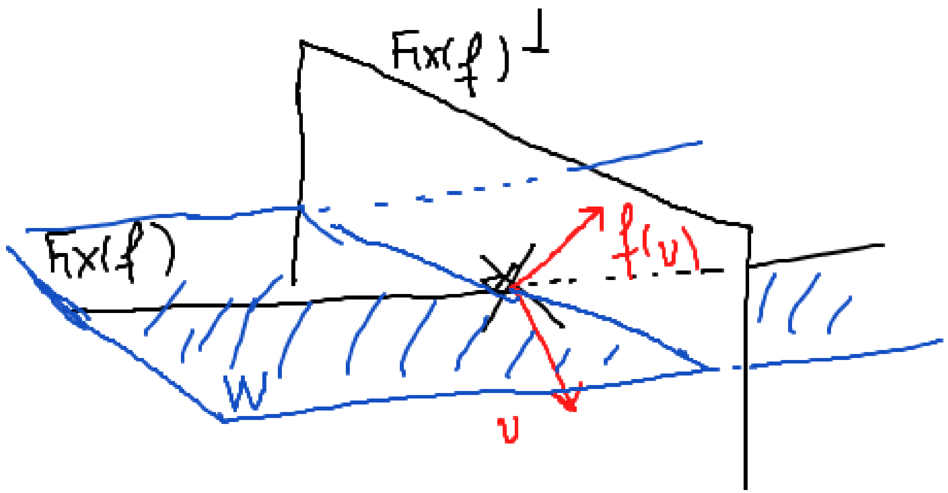
* Cas trivial : $\mathrm{Fix}(f) = V$, c'est-à-dire $f = \mathrm{id}_V$.

$f$ est alors la composée de zéro réflexions !

* On suppose maintenant $\mathrm{Fix}(f) \neq V$.

$$V = \mathrm{Fix}(f) \oplus \mathrm{Fix}(f)^{\perp} \qquad \mathrm{Fix}(f)^{\perp} \neq \{0\}.$$

Soit $v \in \mathrm{Fix}(f)^{\perp}$ non nul.




$$f(v) \neq v$$

$$\boxed{f(v) \in \mathrm{Fix}(f)^{\perp}}$$

En effet, si $w \in \mathrm{Fix}(f)$,

$$(w \mid f(v)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(w)=w}}{=} (f(w) \mid f(v)) = (w \mid v) = 0$$

Soit $W$ l'hyperplan médiateur de $v$ et $f(v)$ et soit $s$ la réflexion par rapport à $W$.

Par construction, $s(v) = f(v)$ et $\mathrm{Fix}(f) \subset W$.

$$\left[\begin{array}{ll} (s\circ f)(v) = s(f(v)) = s(s(v)) = s^2(v) = v & \text{car } s^2 = id_V \\ \text{Si } f(w) = w, \text{ alors } (s\circ f)(w) = s(f(w)) = s(w) = w & \text{car } w \in W \end{array}\right.$$

donc $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Fix}(s\circ f)$ et $v \in \mathrm{Fix}(s\circ f)$

$$\boxed{\mathrm{Fix}(f) + \mathbb{R} v \subset \mathrm{Fix}(s\circ f)}$$

En particulier, $\dim(\mathrm{Fix}(s\circ f)) > \dim(\mathrm{Fix}(f))$.

On conclut par récurrence descendante sur $\dim(\mathrm{Fix}(f))$.

Hypothèse de récurrence : si $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = d$, alors $f$ est une composée de réflexions $(H_d)$

* Initialisation : $d = \dim(V)$ $\qquad f = \mathrm{id}_V$ est composée de 0 réflexion.

* Hérédité : supposons $(H_d)$ vraie pour $d > d_0$.

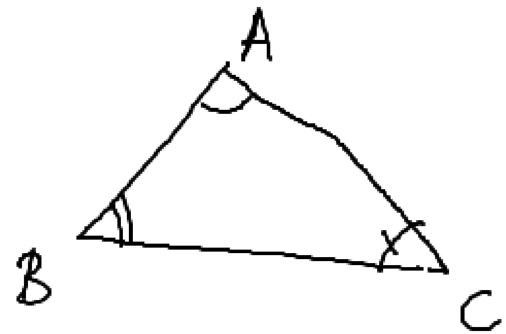
Si $\mathrm{Fix}(f)$ est de dim $d_0$, alors la construction précédente fournit une réflexion $s$ telle que $\dim(\mathrm{Fix}(s\circ f)) > d_0$ ; on en déduit $s\circ f = r_1 \circ \dots \circ r_s$

et donc $f = s \circ (s \circ f) = s \circ r_1 \circ \dots \circ r_\delta$ , ce qui prouve que $f$ est une composée de réflexions.

Rq. On peut faire un peu mieux : $f$ est composée de $\dim(V) - \dim \mathrm{Fix}(f)$ réflexions.

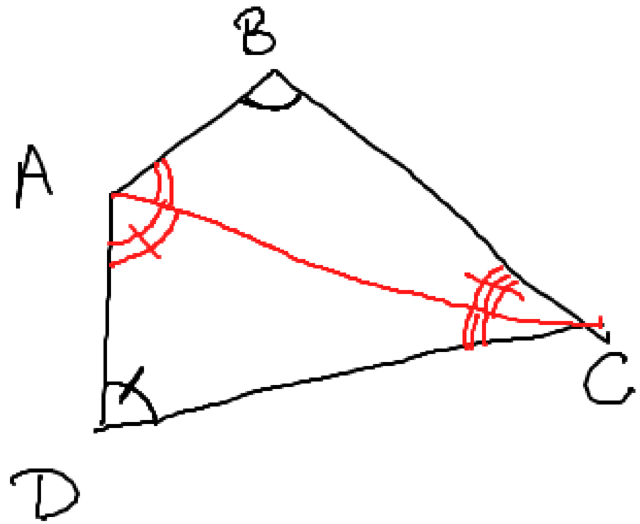
Feuille 8

Exercice 1 -




$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi}$$

1)




$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=2\pi}$$

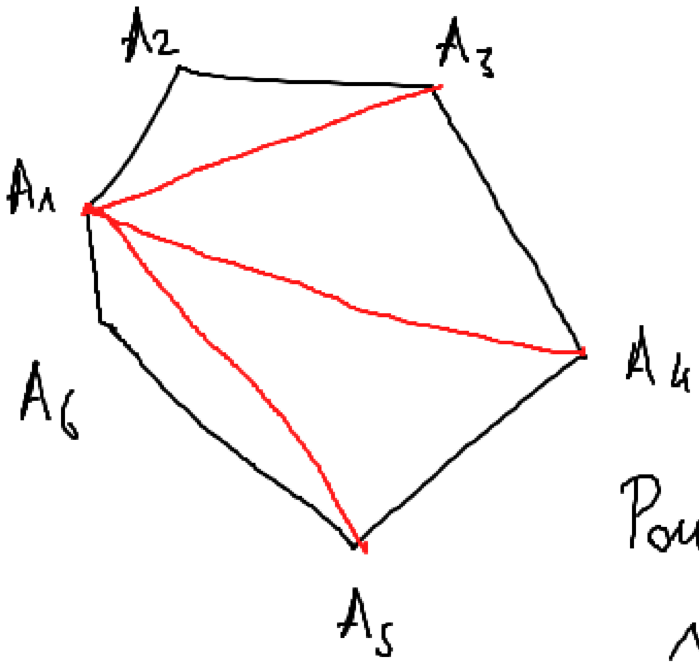
$\hat{A}=\widehat{BAC}+\widehat{CAD}$

$\hat{C}=\widehat{BCA}+\widehat{ACD}$

Relation de Chasles

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=\left(\widehat{CAB}+\hat{B}+\widehat{BCA}\right)+\left(\widehat{CAD}+\widehat{ACD}+\hat{D}\right)=\pi+\pi=2\pi.$$

2) Polygone convexe à $n$ côtés




On fixe un sommet $A_1$ et on considère les triangles $A_1A_kA_{k+1}$ avec $2 \leq k \leq n-1$.

Pour $k \neq 1, 2, n-1$

$$\hat{A}_k = \widehat{A_1A_kA_{k-1}} + \widehat{A_1A_kA_{k+1}} \quad \text{(Chasles)}$$

On considère alors les $(n-2)$ triangles $A_1A_kA_{k+1}$ $(2 \leq k \leq n-1)$

La somme des angles de ces triangles est égale à

$(n-2)\pi$ et à $\sum_{k=1}^{n} \hat{A}_k$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \hat{A}_k = (n-2)\pi}$$