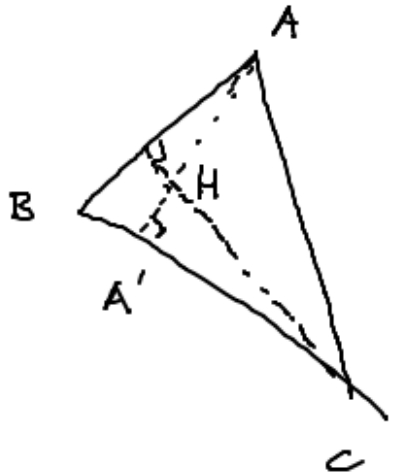
Ex 5 .

Orthocentre comme barycentre



$$H = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{AH} + \beta\,\overrightarrow{BH} + \gamma\,\overrightarrow{CH} = \vec{0} \qquad (*)$$

(i) Soit p la projection orthogonale sur (BC)

$$p(B) = B, \quad p(C) = C, \quad p(A) = A' = p(H)$$

En appliquant $\vec{p}$ à $(*)$, on obtient :

$$\alpha\,\overrightarrow{p(A)p(H)} + \beta\,\overrightarrow{p(B)p(H)} + \gamma\,\overrightarrow{p(C)p(H)} = \vec{0}$$

donc

$$\beta\,\overrightarrow{BA'} + \gamma\,\overrightarrow{CA'} = \vec{0}.$$

Soit $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{BC}$.

$$\beta\,(\overrightarrow{BA'}|\vec{u}) + \gamma\,(\overrightarrow{CA'}|\vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\,BA'.\cos(B) - \gamma\,(\overrightarrow{CA'}|-\vec{u}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \beta\,BA'.\cos(B) - \gamma\,CA'.\cos(C) = 0.$$

On observe :

$$(\overrightarrow{BA'}|\vec{u}) = (\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'A}|\vec{u}) \qquad \text{car } \overrightarrow{A'A} \perp \vec{u}$$

$$= (\overrightarrow{BA}|\vec{u})$$

$$= c \cdot \cos(B)$$

$$(\overrightarrow{CA'}|\vec{u}) = (\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'A}|\vec{u}) \qquad \text{car } \overrightarrow{AA'} \perp \vec{u}$$

$$= (\overrightarrow{CA}|\vec{u})$$

$$= b \cos(C)$$

Conclusion :

$$\beta(\overrightarrow{BA'}|\vec{u}) + \gamma(\overrightarrow{CA'}|\vec{u}) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta c \cos(B) - \gamma b \cos(C) = 0}$$

En procédant de même, on obtient :

$$(S)\begin{cases} \alpha b\cos(A) - \beta a\cos(B) = 0 & (\text{côté } [AB]) \\ \alpha c\cos(A) - \gamma a\cos(C) = 0 & (\text{côté } [AC]) \\ \beta c\cos(B) - \gamma b\cos(B) = 0 & (\text{côté } [BC]) \end{cases}$$

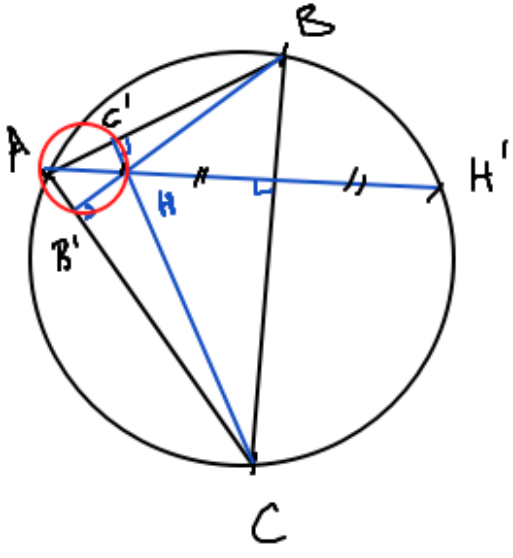
(ii) But : $H = \mathrm{Bar}\{(A, a\cos(B)\cos(C)), (B, b\cos(A)\cos(C)), (C, c\cos(A)\cos(B))\}$.

Il suffit de vérifier que $(a\cos(B)\cos(C), b\cos(A)\cos(C), c\cos(A)\cos(B))$ est solution de (S). En effet, $\mathrm{rg}(S) \geq 2$ de façon évidente et donc toutes les solutions sont proportionnelles.

La vérification est immédiate !

Feuille 10

Ex 1



But : A, B, C, H' sont cocycliques

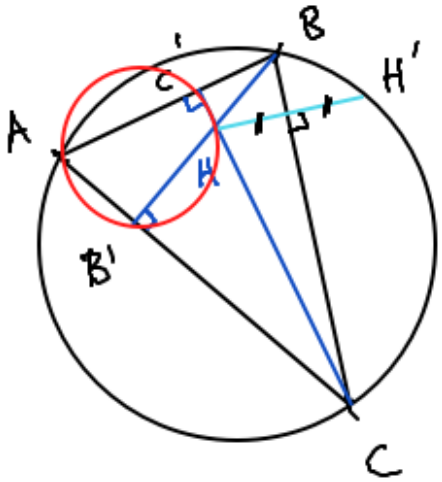
i.e. $(\widehat{\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ modulo l'angle plat.

1) A, H, B', C' sont cocycliques.

En effet : $AB'H$ est rectangle en B', donc son cercle circonscrit $\mathcal{C}$ est centré au milieu I de $[AH]$

De même $AC'H$ est rectangle en C', donc son cercle circonscrit $\mathcal{C}'$ est centré au milieu I de $[AH]$

Ainsi, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, AI) = \mathcal{C}'$ et donc $A, H, B', C' \in \mathcal{C}$.



But : $(\widehat{\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ modulo l'angle plat.

$\cancel{2(\widehat{\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AH}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'H}})}$ (thm de l'angle au centre)

$$(\widehat{\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}}) = -(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) = (\widehat{\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}}) = (\widehat{\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}})$$ modulo l'angle plat

$=$: réflexion orth. d'axe (BC) (indirecte)

$=$: symétrie de centre H (directe)

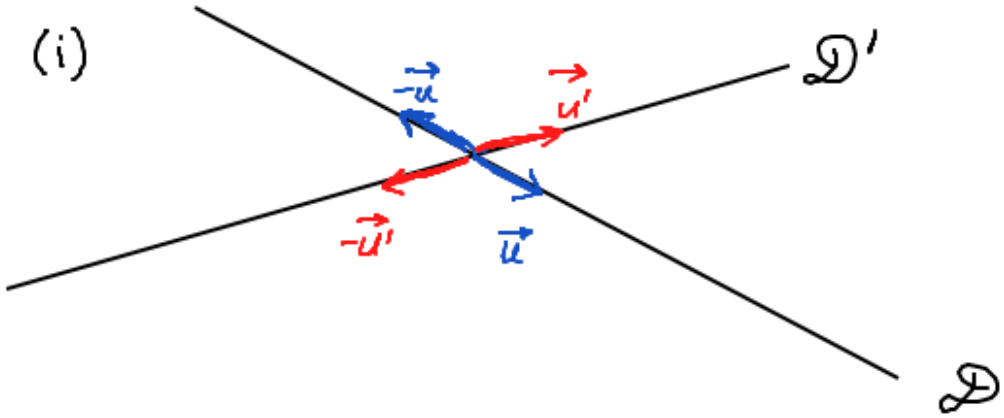
$=$: A, H, B', C' cocycliques

$$= (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$$ modulo l'angle plat.

Conclusion : H' appartient au cercle circonscrit à ABC.

Ex 2

1. (i)



$\|\vec{u}\| = \|\vec{u'}\| = 1$

$$\boxed{\widehat{(\mathcal{D},\mathcal{D}')} = \widehat{(\vec{u},\vec{u'})} \text{ modulo l'angle plat}}$$

$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ ssi $\widehat{(\mathcal{D},\mathcal{D}')}$ nul

$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ ssi $\widehat{(\mathcal{D},\mathcal{D}')}$ droit

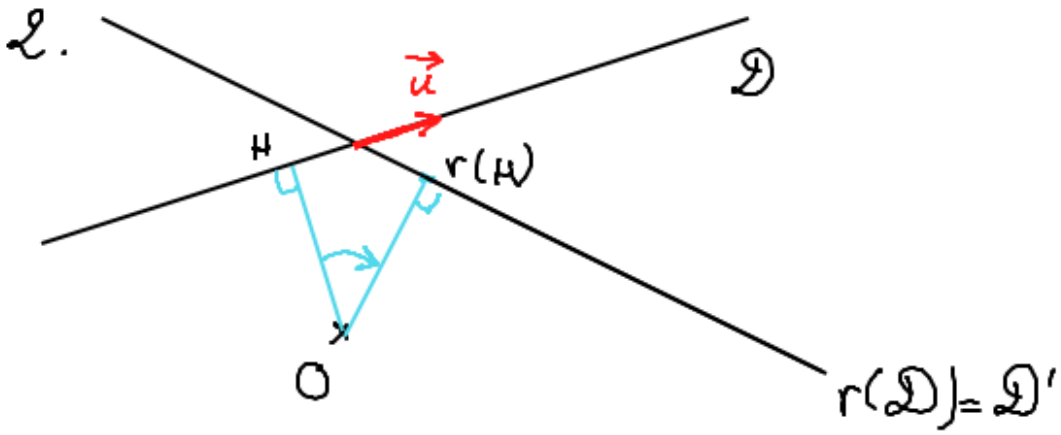
$\widehat{(-\vec{u},\vec{u'})} = \widehat{(-\vec{u},\vec{u})} + \widehat{(\vec{u},\vec{u'})} = \widehat{(\vec{u},\vec{u'})}$ modulo l'angle plat

$\widehat{(\vec{u},-\vec{u'})} = \widehat{(\vec{u},\vec{u'})} + \widehat{(\vec{u'},-\vec{u'})} = \widehat{(\vec{u},\vec{u'})}$ " "

$\widehat{(-\vec{u},-\vec{u'})} = \widehat{(\vec{u},\vec{u'})}$

$\rightsquigarrow$ l'angle orienté entre deux vecteurs directeurs unitaires de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est bien défini modulo l'angle plat (i.e. mesure modulo π) ; c'est l'angle orienté de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

2.



r : rotation de centre O

d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{Or(H)}})$

$$\boxed{(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}) = (\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{Or(H)}}) \text{ modulo l'angle plat}}$$

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}$.

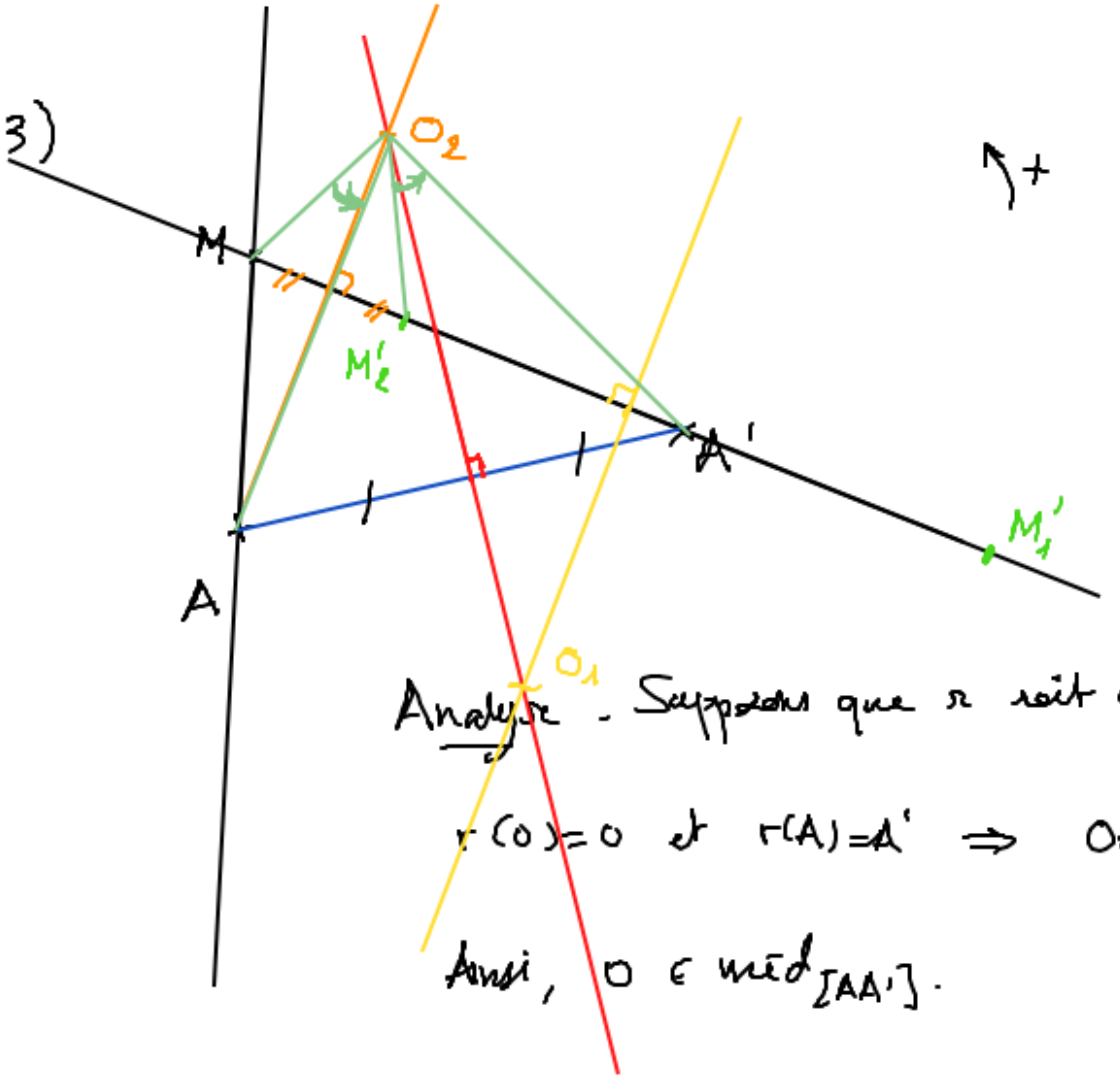
La droite $\mathcal{D}' = r(\mathcal{D})$ est dirigée par $\vec{r}(\vec{u})$; comme $\|\vec{r}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| = 1$ [$\vec{r}$ est une isométrie vectorielle], $\vec{r}(\vec{u})$ est un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}'$.

Par conséquent :

$$(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{r}(\vec{u})}) \quad \text{[angle plat]}$$

$$= (\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{Or(H)}}) \quad \text{[angle plat]}$$

3)



On cherche toutes les rotations r telles que $\begin{cases} r(A) = A' \\ r((AM)) = (A'M) \end{cases}$.

Analyse. Supposons que r soit une telle rotation et notons O son centre.

$r(O) = O$ et $r(A) = A'$ $\Rightarrow$ $OA' = r(O)\,r(A) = OA$ car r est une isométrie.

Ainsi, $O \in \text{méd}_{[AA']}$.

Par ailleurs, $r(M) \in (A'M)$ et $A'r(M) = r(A)r(M) = AM$. Il y a donc deux possibilités : $r(M) = M'_1$ ou $r(M) = M'_2$, où M'_1 et M'_2 sont les deux points de $(A'M)$ tels que

$$A'M'_1 = A'M'_2 = AM.$$

On en déduit :

- si $r(M) = M'_1$, alors $OM'_1 = r(O)\,r(M) = OM$, donc $O \in \text{méd}_{[MM'_1]}$

- si $r(M) = M'_2$, alors $OM'_2 = r(O)\,r(M) = OM$, donc $O \in \text{méd}_{[MM'_2]}$.

Synthèse. Soit M'_1 et M'_2 les deux points de $(A'M)$ tels que $A'M'_1 = A'M'_2 = AM$.
Soit O_1 (resp. O_2) le point d'intersection de $\text{méd}_{[AA']}$ et $\text{méd}_{[MM'_1]}$ (resp. $\text{méd}_{[AA']}$ et $\text{méd}_{[MM'_2]}$).

Soit $r_1 = \text{Rot}\left(O_1, \widehat{(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1A'})}\right)$, $r_2 = \text{Rot}\left(O_2, \widehat{(\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2A'})}\right)$. Par définition, $r_1(A) = A'$ et $r_2(A) = A'$.

Les triangles O_2MA et $O_2M'_2A'$ vérifient : $O_2M = O_2M'_2$, $O_2A = O_2A'$ et $MA = M'_2A'$ donc ils sont isométriques et $\widehat{MO_2A} = \widehat{M'_2O_2A'}$. On observe que ces angles sont tous les deux directs donc $\widehat{(\overrightarrow{O_2M}, \overrightarrow{O_2A})} = \widehat{(\overrightarrow{O_2M'_2}, \overrightarrow{O_2A'})}$. On en déduit :

$$\widehat{(\overrightarrow{O_2M}, \overrightarrow{O_2M'_2})} = \widehat{(\overrightarrow{O_2M}, \overrightarrow{O_2A})} + \widehat{(\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2A'})} + \widehat{(\overrightarrow{O_2A'}, \overrightarrow{O_2M'_2})}$$

$$= \widehat{(\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2A'})} \qquad \text{car} \quad \widehat{(\overrightarrow{O_2M}, \overrightarrow{O_2A})} = \widehat{(\overrightarrow{O_2M'_2}, \overrightarrow{O_2A'})}$$

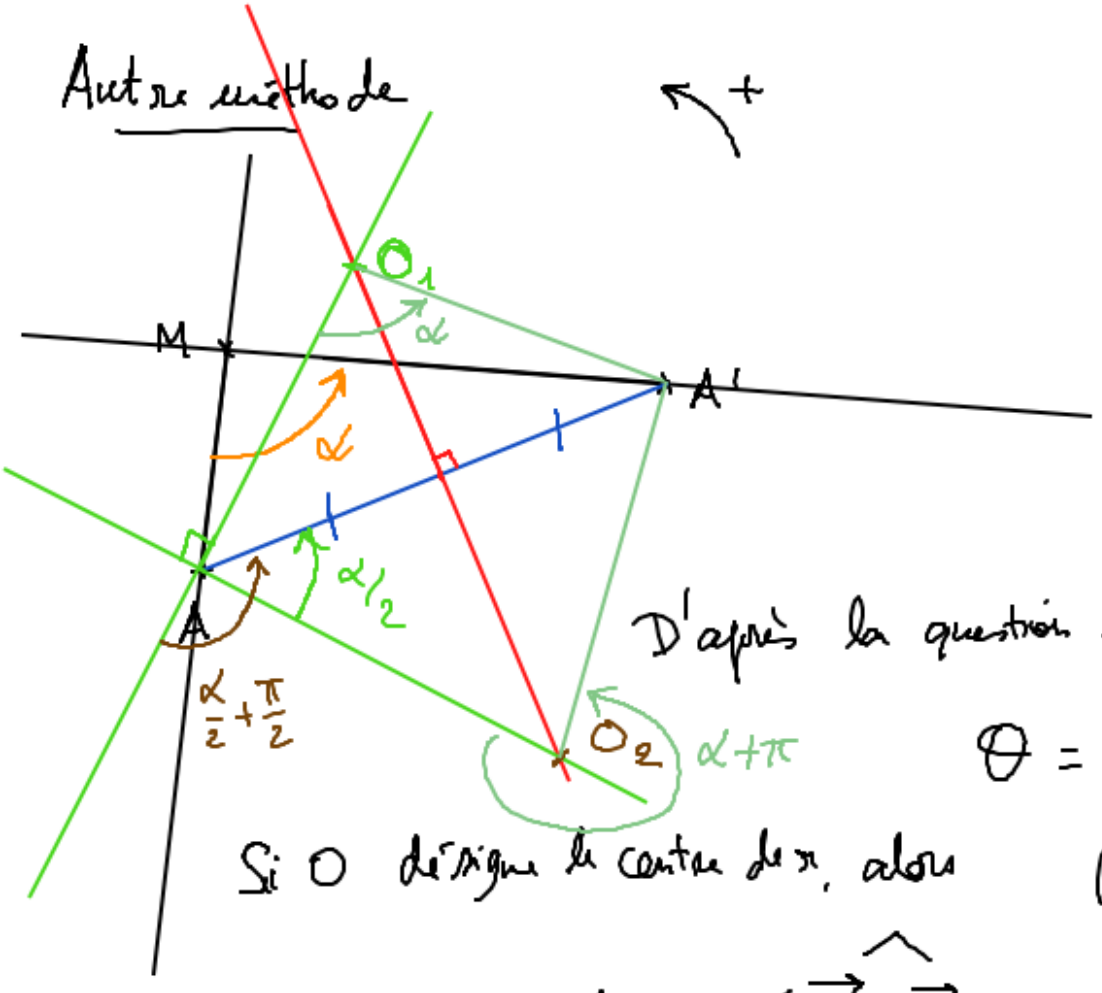
$$= -\widehat{(\overrightarrow{O_2A'}, \overrightarrow{O_2M'_2})}.$$

Ainsi, $r_2(M) = M'_2$ et donc $r_2((AM)) = (r_2(A) r_2(M)) = (A'M'_2) = (A'M)$.

On vérifie de même : $r_1((AM)) = (A'M)$.

Conclusion : il existe exactement deux rotations r telles que $r(A) = A'$ et $r((AM)) = (A'M)$.

Autre méthode



Supposons que r soit une rotation telle que $r(A)=A'$ et $r((AM)) = (A'M)$. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ l'angle de r.

D'après la question 2, $\theta = \alpha \pmod{\pi}$, donc

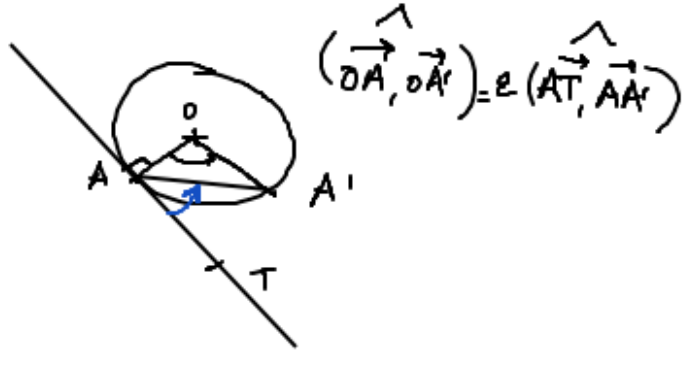
$$\theta = \alpha \quad \text{ou} \quad \theta = \alpha + \pi .$$

Si O désigne le centre de r, alors $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \alpha$ ou $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \alpha+\pi$.

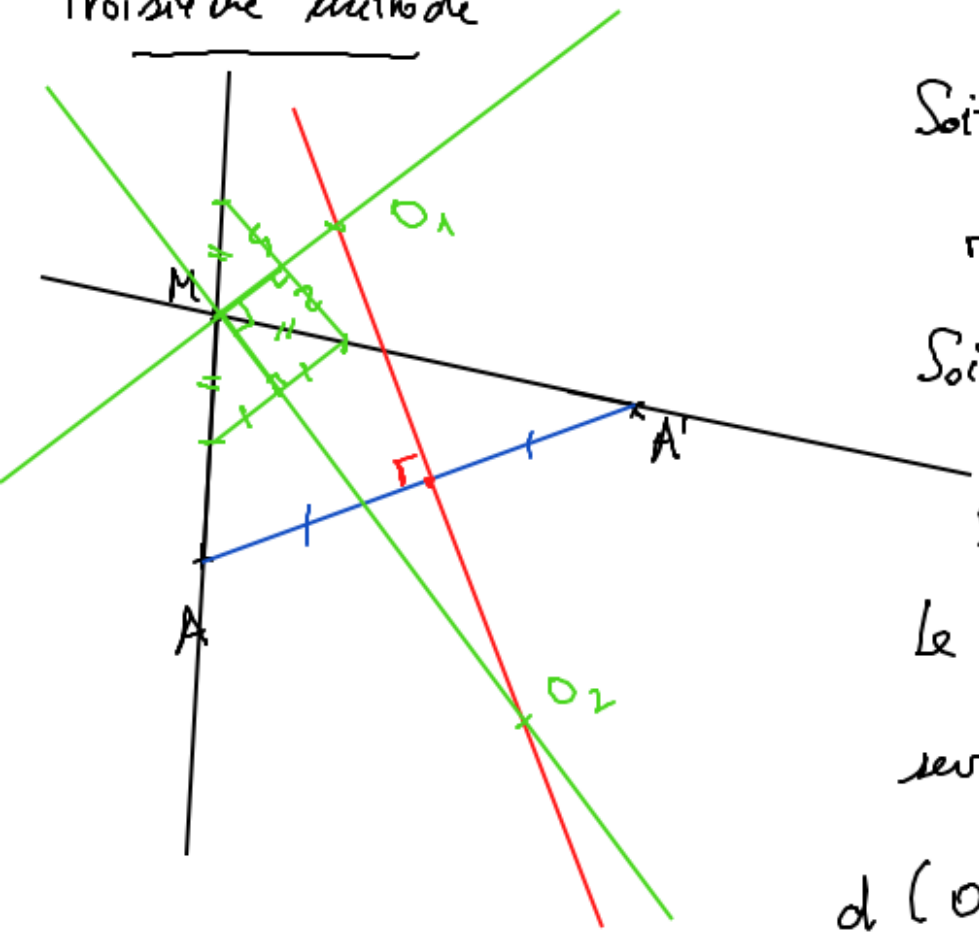
Comment construire O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \alpha$?

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par A. La tangente à $\mathcal{C}$ au point A est la droite (AT) telle que

$$(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AA'}}) = \alpha/2$$



Troisième méthode



Soit r une rotation telle que

$r(A) = A'$ et $r((AM)) = (A'M)$.

Soit O le centre de r.

Soit H le projeté orthogonal de O sur (AM).

Le point $r(H)$ est le projeté orthogonal de O sur $r((AM)) = (A'M)$. On en déduit :

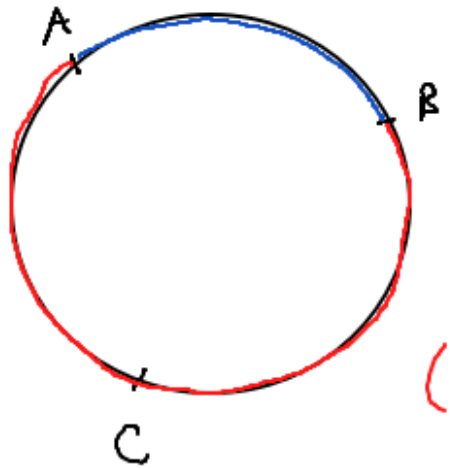
$$d(O,(AM)) = OH = r(O)r(H) = Or(H) = d(O,(A'M))$$

donc O est équidistant de (AM) et $(A'M)$.

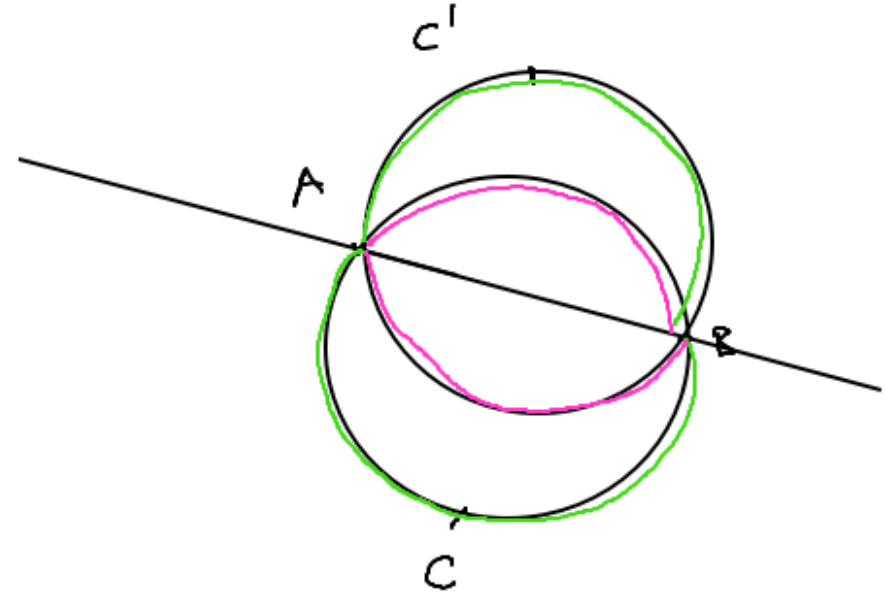
On sait que ceci équivaut à $O \in \mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_e$, où $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_e$ sont les bissectrices de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'})$.

Ex 3

$(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$ + angle plat



$(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$



$\widehat{AMB} = \widehat{ACB} \iff (\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$

ou

$(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = -(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$

$= (\widehat{\vec{CA},\vec{CB'}})$

$\widehat{AMB} = \pi - \widehat{ACB}$