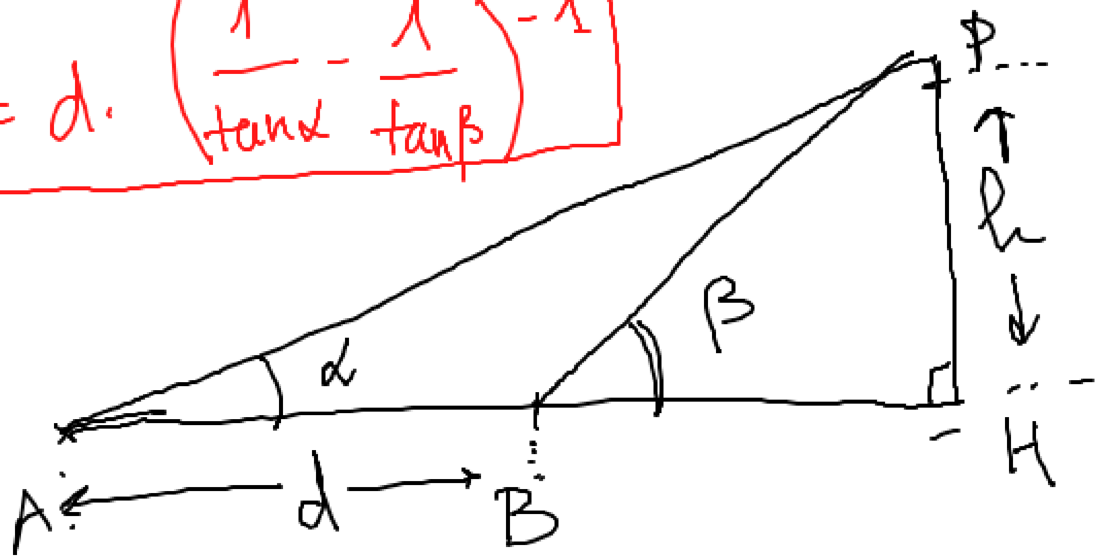
Feuille 9

Ex 1

$$\boxed{h = d\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{1}{\tan\beta}\right)^{-1}}$$



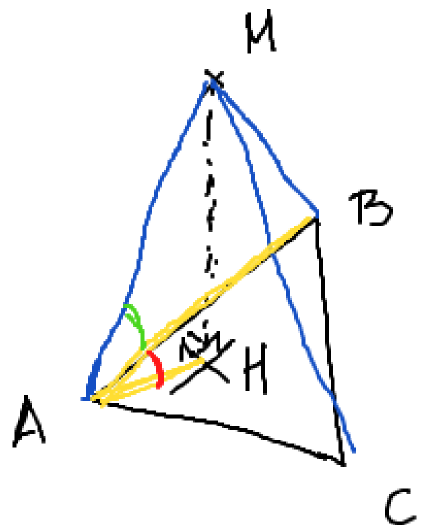
$$\tan\alpha = \frac{h}{d+BH} \quad \text{donc} \quad (d+BH)\tan\alpha = h$$

$$\tan\beta = \frac{h}{BH} \quad \text{donc} \quad BH.\tan\beta = h$$

$$BH = \frac{h}{\tan\alpha} - d = \frac{h}{\tan\beta}$$

$$h\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right) = d$$

Ex 2 —



ABC à angles $\leq \frac{\pi}{2}$

1) $\widehat{HAB} \leq \widehat{MAB}$ et

$\widehat{HAB} = \widehat{MAB}$ ssi $M = H$.

$AH \leq AM$?

$AM^2 = AH^2 + MH^2 \geq AH^2$ et donc $AM \geq AH$.

$\cos(\widehat{HAB}) = \left(\frac{\vec{AH}}{AH} \middle| \frac{\vec{AB}}{AB} \right)$ (déf)

$\cos(\widehat{MAB}) = \left(\frac{\vec{AM}}{AM} \middle| \frac{\vec{AB}}{AB} \right)$

$\cos(\widehat{HAB}) = \frac{1}{AB \cdot AH} (\vec{AH} | \vec{AB})$

$\cos(\widehat{MAB}) = \frac{1}{AB \cdot AM} (\vec{AM} | \vec{AB})$

Observation-clef :

$$(\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}|\overrightarrow{AB})$$
$$= (\overrightarrow{AH}|\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{HM}|\overrightarrow{AB})$$
$$= (\overrightarrow{AH}|\overrightarrow{AB})$$

car $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan (ABC).

Conclusion :

$$\frac{\cos(\widehat{MAB})}{\cos(\widehat{HAB})} = \frac{AB.AH}{AB.AM} \cdot \frac{(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AM})}{(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AH})} = \frac{AH}{AM} \leq 1$$

avec égalité ssi $M=H$.

Par hypothèse, $\widehat{HAB} < \widehat{CAB} \leq \frac{\pi}{2}$ (H intérieur) donc $\cos(\widehat{HAB}) > 0$.

On obtient donc

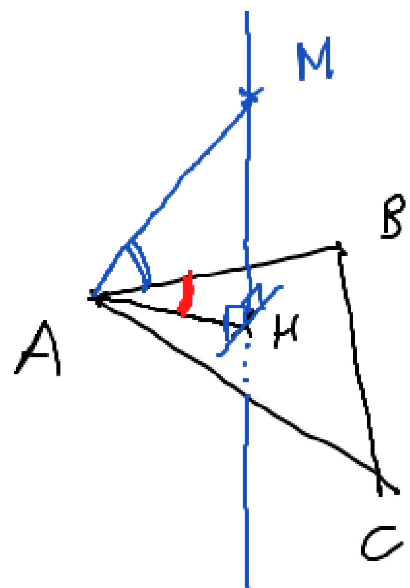
$$\cos(\widehat{MAB}) \leq \cos(\widehat{HAB})$$

avec égalité si $M = H$.

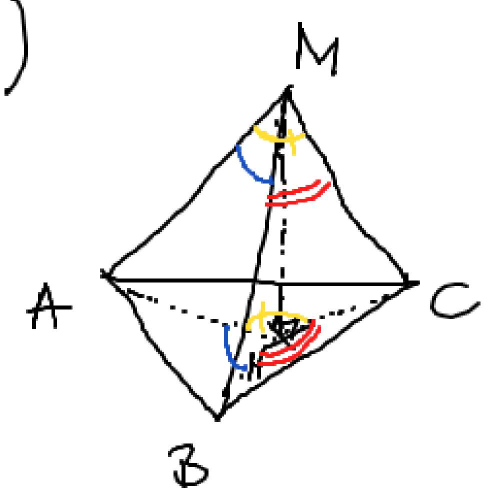
Par décroissance stricte de cos sur $[0, \pi]$, ceci équivaut à :

$$\widehat{HAB} \leq \widehat{MAB}$$

avec égalité si $M = H$.

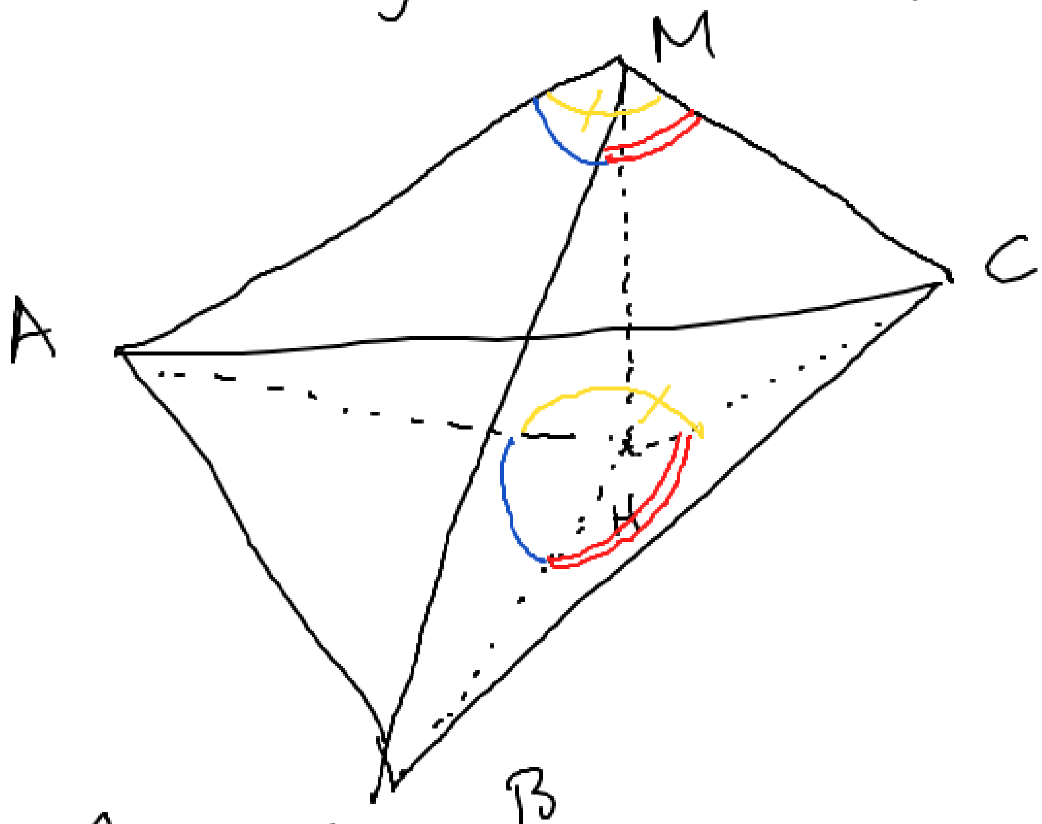


2)



$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{AMC} \leq 2\pi$$

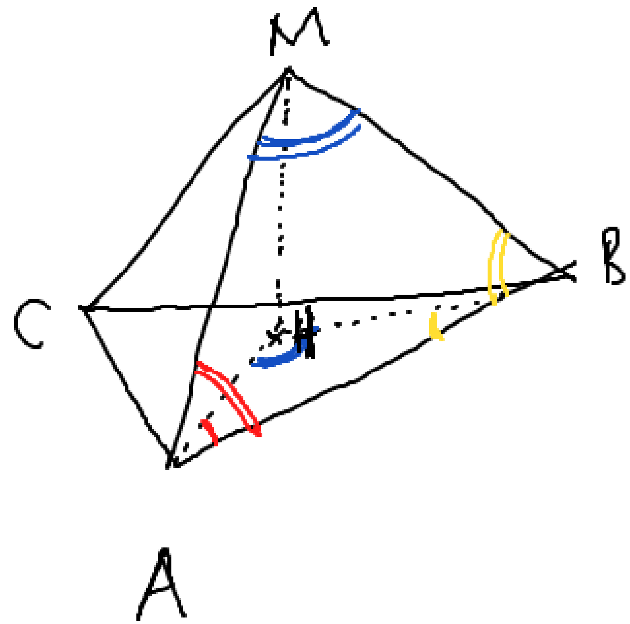
avec égalité si $M \in (ABC)$



$$\boxed{\widehat{AHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHA} = 2\pi}$$

Idée de méthode :

prouver $\widehat{AMB} \leq \widehat{AHB}$, $\widehat{AMC} \leq \widehat{AHC}$ et $\widehat{BMC} \leq \widehat{BHC}$.



Connu (question 1) :

$\widehat{HAB} \leq \widehat{MAB}$ et égalité ssi $M=H$

$\widehat{HBA} \leq \widehat{MBA}$ ———

$$\widehat{AMB} = \pi - \widehat{MAB} - \widehat{MBA}$$

$$= \left(\widehat{AHB} + \underbrace{\widehat{HAB}}_{\sim} + \underbrace{\widehat{HBA}}_{=}\right) - \underbrace{\widehat{MAB}}_{\sim} - \underbrace{\widehat{MBA}}_{=} = \widehat{AHB} + \underbrace{\left(\widehat{HAB} - \widehat{MAB}\right)}_{\leq 0} + \underbrace{\left(\widehat{HBA} - \widehat{MBA}\right)}_{\leq 0}$$

donc $\widehat{AMB} \leq \widehat{AHB}$ et égalité ssi $M=H$.

(Reprise)

$$\widehat{AMB} = \widehat{AHB} + \underbrace{(\widehat{HAB} - \widehat{MAB})}_{\leq 0} + \underbrace{(\widehat{HBA} - \widehat{MBA})}_{\leq 0}$$

donc $\widehat{AMB} - \widehat{AHB} = (\widehat{HAB} - \widehat{MAB}) + (\widehat{HBA} - \widehat{MBA}) \leq 0$

et $\boxed{\widehat{AMB} \leq \widehat{AHB}}$.

Conclusion – $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMA} \leq \widehat{AHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHA} = 2\pi$

avec égalité si $\widehat{AMB} = \widehat{AHB}$, $\widehat{BMC} = \widehat{BHC}$ et $\widehat{CMA} = \widehat{CHA}$, c'est-à-dire si $M = H \in (ABC)$.

Ex 3

$\mathcal{E}$ plan affine euclidien

choix !

Rappel : dans tout plan $\boxed{\text{affine}}$ $\mathcal{E}$, si on fixe une base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathcal{E}}$, on définit l'aire algébrique de ABC par

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC}) \in \mathbb{R}.$$

Son aire géométrique est $S_{ABC} = |\mathcal{A}(ABC)|$.

Rq . Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de $\vec{\mathcal{E}}$, alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \det(\mathcal{B}/_{\mathcal{B}'}) \times \det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC}).$$

En particulier :

- un changement de base de dét $= 1$ ne change pas les aires alg

- un changement de base de dét $= \pm 1$ ne change pas les aires géom.

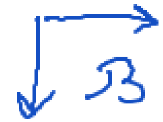
Avec, en plus, une structure euclidienne

(i) on peut se limiter à ne considérer que des b.o.n. pour définir les aires

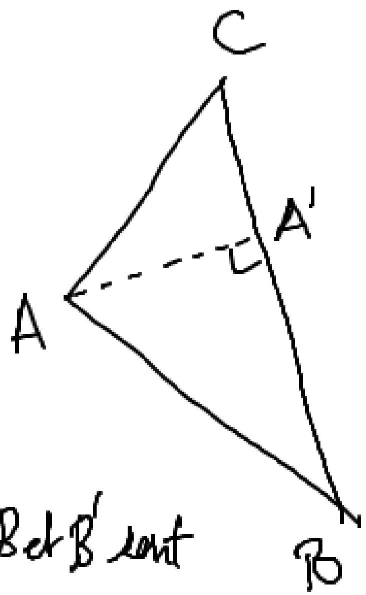
(ii) l'aire géométrique ne dépend pas du choix de la base orthonormée utilisée

(iii) en orientant le plan, l'aire algébrique ne dépend du choix de la b.o.n. directe utilisée.

Exemple illustratif



Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{E}$ $\rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l}\text{aire algébrique}\\ \text{aire géométrique}\end{array}\right\}$ bien définies



Nouvelle base orthonormée : $\mathcal{B}' = \Big(\underbrace{\frac{\overrightarrow{AA'}}{AA'}}_{\vec{i}} , \underbrace{\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}}_{\vec{j}} \Big)$

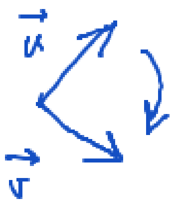
$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) \\
&= \det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \\
&= \det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BC}) \\
&= \det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}) = \det_{\mathcal{B}'}(AA'\vec{i}, BC\vec{j}) \\
&= AA'.BC.\det_{\mathcal{B}'}(\vec{i}, \vec{j}) \\
&= AA'.BC
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées,

changement de base orth.

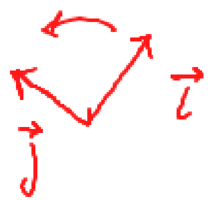
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\Big|\underbrace{\det}_{\text{det } 1}{}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\Big| = \frac{1}{2}\Big|\det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\Big| = \frac{1}{2} AA'.BC$$

On fixe maintenant une orientation du plan



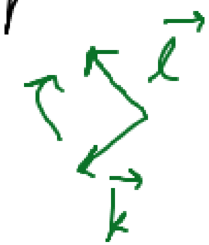
$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$

directe



$\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{j})$

indirecte

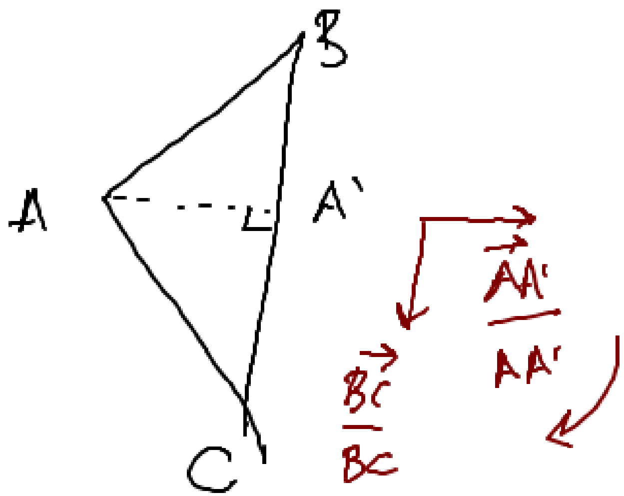


$\mathcal{B}'' = (\vec{k}, \vec{l})$

directe

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AA' \cdot BC$$

$$\mathcal{A}(ABC) = ?$$



$$\mathcal{A}(ABC) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC})$$

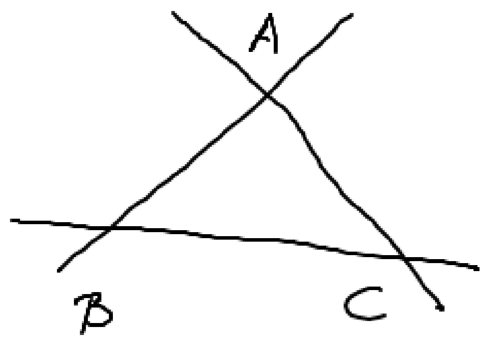
changement de base directe

$$= \frac{1}{2} \det_{\mathcal{B}'''}(\vec{AB}, \vec{AC})$$

$$= \frac{1}{2} AA' \cdot BC \quad \text{(cf. précédent)}$$

$\mathcal{B}''' = \left(\dfrac{\vec{AA'}}{AA'}, \dfrac{\vec{BC}}{BC} \right)$ est directe

3)



(A,B,C) repère affine de $\mathcal{E}$

Tout pt $M \in \mathcal{E}$ s'écrit sous la forme

$$M = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$$

Avec la normalisation $\alpha+\beta+\gamma=1$, les coeff α,β,γ sont uniquement définis ; ce sont les coordonnées barycentriques de M dans (A,B,C).

Fait

$$\alpha = \frac{\mathcal{A}(MBC)}{\mathcal{A}(ABC)}, \quad \beta = \frac{\mathcal{A}(AMC)}{\mathcal{A}(ABC)}, \quad \gamma = \frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ABC)}$$

(relativement à une base fixée de $\vec{\mathcal{E}}$).

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0} \qquad \alpha+\beta+\gamma=1$$

$$\mathcal{A}(MBC)=\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{BC}) \qquad [\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}]$$

$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{CB}$, donc $\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{CB}$.

Ainsi, $\mathcal{A}(MBC)=\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\alpha\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BC})$

$$=\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\alpha\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$$

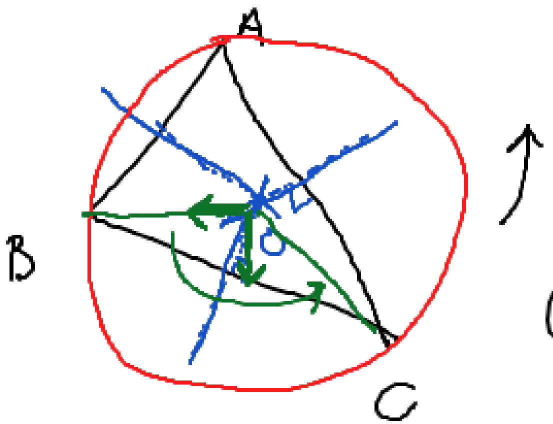
$$=\alpha\,\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$$

$$[\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}]$$

$$=\alpha\,\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\alpha\,\mathcal{A}(ABC)$$

D'où $\alpha=\dfrac{\mathcal{A}(MBC)}{\mathcal{A}(ABC)}$. Idem pour β et γ.

Illustration (ex 5, q. 2)



On veut exprimer O comme barycentre de A, B et C.

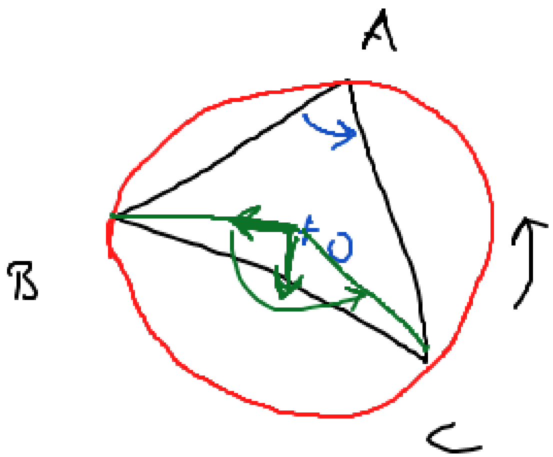
On sait que $O = \text{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

avec $\alpha = \dfrac{\mathcal{A}(OBC)}{\mathcal{A}(ABC)}$, $\beta = \dfrac{\mathcal{A}(AOC)}{\mathcal{A}(ABC)}$ et $\gamma = \dfrac{\mathcal{A}(ABO)}{\mathcal{A}(ABC)}$.

On oriente le plan en décidant que $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base directe. Alors,

$\mathcal{A}(ABC) > 0$ et $\mathcal{A}(ABC) = S_{ABC}$.

Calculons $\mathcal{A}(OBC)$. On considère la base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \vec{OB}/OB$.



$\vec{OC} = r(\vec{OB})$ où r est la rotation vectorielle d'angle $(\widehat{\vec{OB}, \vec{OC}}) = 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$.

Le vecteur $r(\vec{OB}) = r(OB . \vec{u}) = OB\, r(\vec{u})$ a pour coordonnées $OB \begin{pmatrix} \cos 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \\ \sin 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Ainsi,

$$\mathcal{A}(OBC) = \frac{1}{2} \det_{(\vec{u}, \vec{v})} (\vec{OB}, \vec{OC}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} OB & OB \cos 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \\ 0 & OB \sin 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} OB^2 . \sin 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{1}{2} OB^2 \sin(2\hat{A}).$$

Conclusion :

$$O = \mathrm{Bar}\,\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2\sin(2\hat{A})}{S_{ABC}}$$

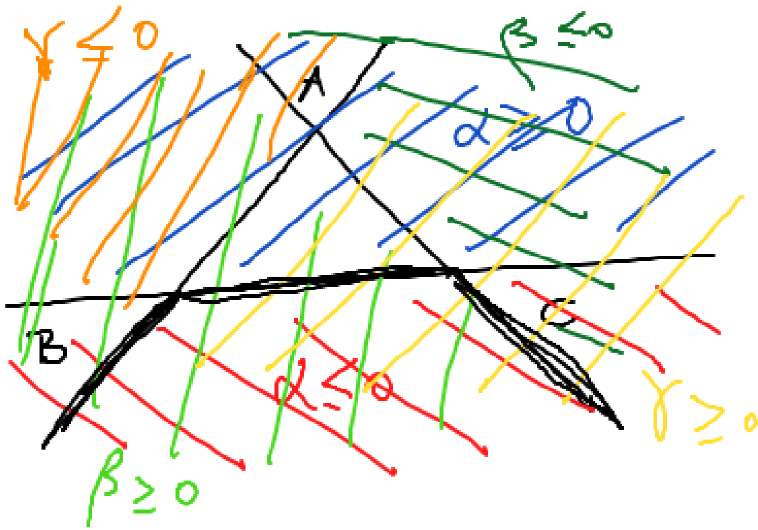
$$\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2\sin(2\hat{B})}{S_{ABC}}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2\sin(2\hat{C})}{S_{ABC}}$$

Rq. Également,

$$O = \mathrm{Bar}\,\{(A,\sin(2\hat{A})),(B,\sin(2\hat{B})),(C,\sin(2\hat{C}))\}.$$

$O = \mathrm{Bar}\{(A, \sin(2\hat{A})), (B, \sin(2\hat{B})), (C, \sin(2\hat{C}))\}$.



M de coordonnées barycentrique (α, β, γ) dans (A, B, C).

1) $2\hat{A}, 2\hat{B}, 2\hat{C} < \pi$, i.e. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ O est à l'intérieur de ABC.

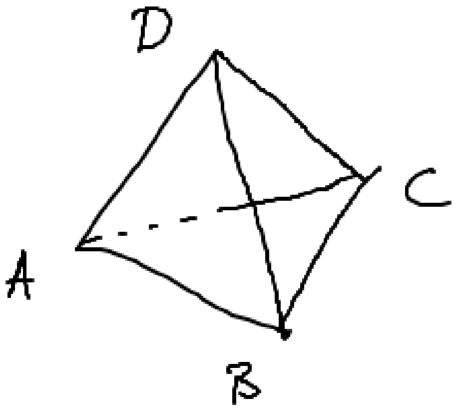
2) $2\hat{A} = \pi$, i.e. $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$. Alors $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$, donc $\hat{B}, \hat{C} < \frac{\pi}{2}$.

$\rightarrow$ O appartient à [BC]

3) $2\hat{A} > \pi$, i.e. $\hat{A} > \frac{\pi}{2}$, alors $\hat{B}, \hat{C} < \frac{\pi}{2}$ car $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$

$\rightarrow$ O est ext. au triangle et dans le cône de bord [AB), [AC)

Ex 4 (Volumes) — $\mathcal{E}$ espace affine euclidien de dim 3.



base de $\vec{\mathcal{E}}$ fixée

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{6} \det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$$

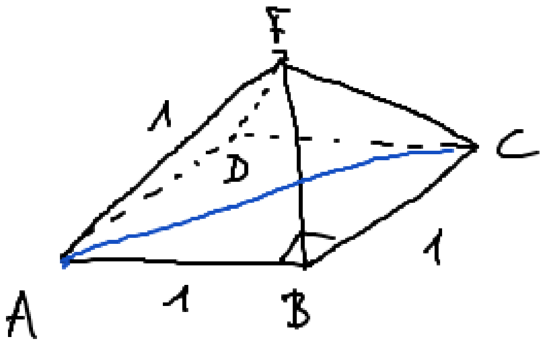
volume algébrique

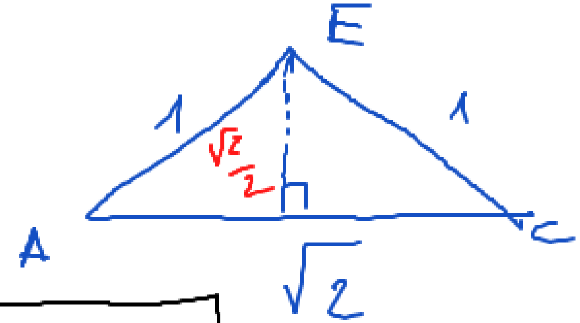
$$V_{ABCD} = |\mathcal{V}(ABCD)|$$ volume géométrique.

Si on utilise des bases orthonormées, le volume géo. est indépendant du choix de la base.

_____________________ directes, le volume algébrique _______

3)





Pyramide régulière Π

$$\boxed{V_\Pi = 2V_T}$$

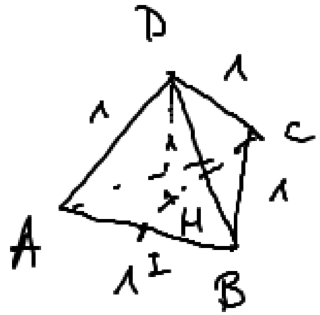
$$1-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 = 1-\frac12 = \frac12$$

$$V_\Pi = V_{ABCE} + V_{ACDE}$$

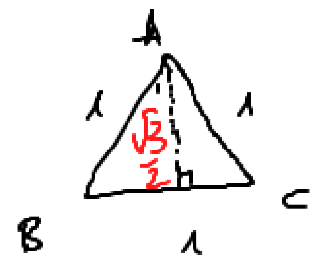
$$= 2V_{ABCE}$$

$$= \frac{2}{3}\, S_{ABC} \times d(E,(ABC))$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt2}{2} = \frac{\sqrt2}{3}$$

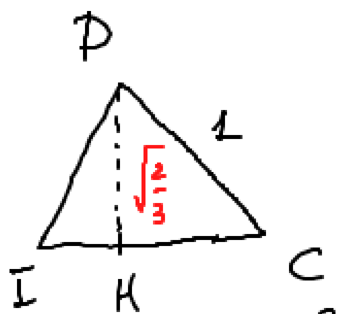


$$V_{ABCD} = \frac13 S_{ABC} \times d(D, ABC)$$



$$1-\left(\frac12\right)^2 = \frac34$$

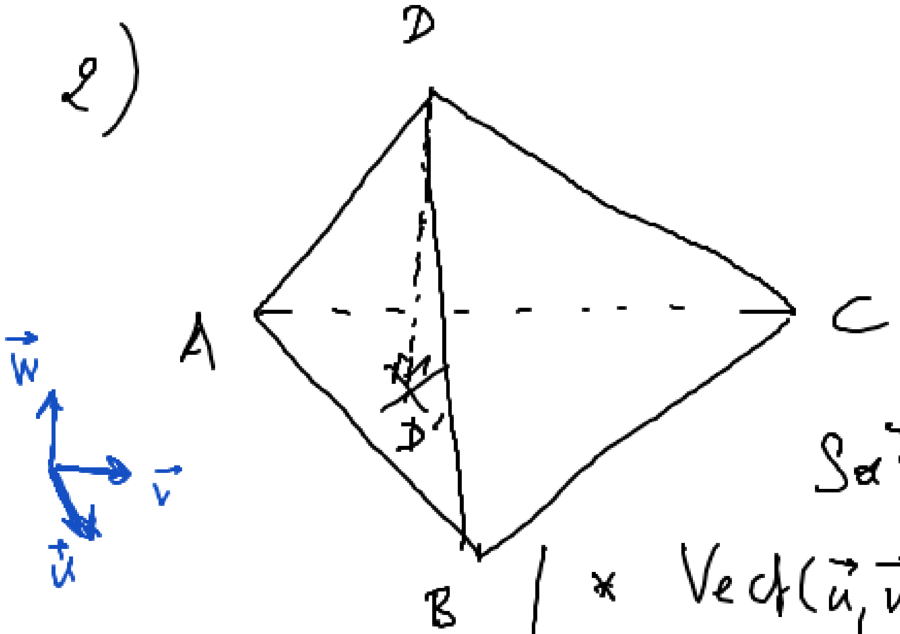
donc $S_{ABC} = \frac{\sqrt3}{4}$.



$$V_{ABCD} = \frac13 \times \frac{\sqrt3}{4} \times \sqrt{\frac23} = \frac{\sqrt2}{12}$$

$$CH = \frac23 CI = \frac23 \times \frac{\sqrt3}{2} = \frac{\sqrt3}{3} = \sqrt{\frac13}$$

2)



$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DD'}$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{\mathcal{E}}$ telle que

* $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{AB}, \vec{AC})$
* $\vec{w} \in \mathrm{Vect}(\vec{DD'})$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD'}+\vec{D'D})\right| = \frac{1}{6}\left|\det_{\mathcal{B}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{D'D})\right|$$

changement de bon

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} \mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{AB}, \vec{AC}) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \pm DD' \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6} DD' \cdot \left|\det_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{AB}, \vec{AC})\right|$$

bon

$$= \frac{1}{3} DD' \cdot S_{ABC}$$