FEUILLES D'EXERCICES 5 : BARYCENTRES

Exercice 1 — Considérons un tétraèdre $ABCD$ dans un espace affine réel de dimension 3; il s'agit de l'enveloppe convexe des quatre points A, B, C et D, supposés non coplanaires.

Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1. Démontrer que G est également :
   (i) le barycentre des points pondérés $(A, 1), (A', 3)$, où A' est le centre de gravité du triangle BCD;
   (ii) l'isobarycentre des points I et J, milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.
2. Quelles propriétés de concours de droites remarquables dans un tétraèdre peut-on en déduire?

Exercice 2 — Démontrer qu'une application affine qui conserve l'ensemble des sommets d'un quadrilatère convexe conserve ce quadrilatère.

Exercice 3 — 1. Soit A et B deux points distincts dans un espace affine réel. Soit M le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), avec $\alpha + \beta = 1$.
(i) Démontrer que M est plus proche du point ayant le poids le plus gros en valeur absolue.
(ii) Caractériser le segment $[AB]$ et les deux composantes de son complémentaire dans (AB) en fonction des signes de α et β.

2. Considérons maintenant trois points non alignés A, B et C dans un plan affine réel. On rapelle que, pour tout point M du plan, il existe un unique triplet (α, β, γ) de nombres réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et M soit le barycentre des points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta)$ et (C, γ); ce sont les *coordonnées barycentriques* du point M relativement au repère affine (A, B, C).

   Caractériser les sept régions du plan délimitées par les droites $(AB), (BC)$ et (AC) en fonction des coordonnées barycentriques.

Exercice 4 — Considérons trois points non alignés A, B, C dans un plan affine. Soit M, M', M'' trois points du plan, de coordonnées barycentriques respectives $(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')$ relativement au repère affine (A, B, C).

1. Démontrer que les points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

2. En déduire que l'*équation bartycentrique* d'une droite (c'est-à-dire, la relation qui lie les coordonnées barycentriques (a, b, c) de ses points) est de la forme

$$ua + vb + wc = 0,$$

   avec $u, v, w \in \mathbf{R}$ non tous égaux.

3. Considérons trois droites D_1, D_2, D_3 dans le plan, d'équations barycentriques respectives

$$u_i a + v_i b + w_i c = 0 \qquad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Démontrer que ces droites sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On pourra utiliser l'exercice 6 de la feuille 2.

Pour une illustration de ces critères, voir l'exercice suivant.

Exercice 5 — Considérons trois points A, B et C non alignés dans un plan affine réel. On note P le barycentre de (B,β) et (C,γ), Q le barycentre de (A,α') et (C,γ') et R le barycentre de (A,α'') et (B,β'').

1. Démontrer que les points P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' = 0.$$

2. Démontrer que les droites $(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\alpha'\beta''\gamma - \alpha''\beta\gamma' = 0$$

3. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Ménélaüs (cf. Feuille 4, exercice 4).
4. En déduire également une démonstration du *théorème de Ceva* : avec les notations précédentes, les droites $(AP), (BQ)$ et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}}\frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}}\frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$