FEUILLES D'EXERCICES 4 : APPLICATIONS AFFINES

Exercice 1 — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine (de dimension finie) sur un corps K et soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, de partie linéaire $\overrightarrow{f}$.

1. Considérons l'ensemble
$$\mathscr{F} = \left\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = M\right\}$$
des points fixes de f. Démontrer que si $\mathscr{F}$ n'est pas vide, alors il s'agit d'un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, de direction $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}})$.
2. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f possède un unique point fixe ;
   (ii) l'application linéaire $\overrightarrow{f}$ n'admet pas 1 pour valeur propre.

Exercice 2 — Considérons un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère.

1. Écrire l'expression analytique de la projection affine sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x - y + z + 3 = 0$, dans la direction $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Faire de même pour la symétrie affine par rapport à ce même plan et selon la même direction.
2. Étudier l'application affine f déterminée par les formules
$$\begin{array}{rcl} x' & = & 1 - y - z \\ y' & = & 2 - 2x - y - 2z \\ z' & = & -2 + 2x + 2y + 3z \end{array}$$
(Déterminer les sous-espaces propres de $\overrightarrow{f}$, puis l'ensemble des points fixes de f ; en déduire la nature de cette application affine.)

Exercice 3 — Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati dans un plan affine réel $\mathscr{E}$.

1. Déterminer toutes les applications affines f de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui préservent ce parallélogramme.
2. Identifier le groupe qu'elles forment.

Exercice 4 — Soit h_1 et h_2 deux homothéties d'un espace affine $\mathscr{E}$, de rapports respectifs λ_1 et λ_2. Posons $f = h_2 \circ h_1$.

1. Si $\lambda_1\lambda_2 = 1$, démontrer que f est une translation et préciser son vecteur.
2. Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, démontrer que f est une homothétie. Déterminer son centre et son rapport.
3. Déduire de ce qui précède une démonstration du *théorème de Ménélaüs* : si ABC est un triangle non plat et P, Q, R sont des points situés respectivement sur $(BC), (CA), (AB)$ et distincts de A, B, C, alors P, Q, R sont alignés si et seulement si
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$
Indication : considérer des homothéties h_P, h_Q, h_R, de centres respectifs P, Q, R et de rapports judicieux...

Exercice 5 — 1. Soit s un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une décomposition en somme directe $V = W \oplus W'$ telle que $s(w + w') = w - w'$ pour tous vecteurs $w \in W, w' \in W'$;

(ii) il existe une base de V dans laquelle la matrice de s est diagonale, avec des coefficients diagonaux à 1 ou -1.

(iii) $s^2 = \mathrm{id}_V$.

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine réel (de dimension finie) et soit s une application affine de $\mathscr{E}$ dans lui-même.

2. Supposons que l'on ait $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Démontrer que s admet un point fixe (considérer le milieu du segment $[As(A)]$...).
3. En déduire que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) s est une symétrie affine;
   (ii) $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

Exercice 6 — Soit A, B, C trois points non alignés d'un espace affine. On considère les trois symétries centrales s_A, s_B, s_C par rapport aux points A, B, C.

1. Démontrer que la composée $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.
2. Pour tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$, démontrer l'identité
$$s_C \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ s_C = t_{-\overrightarrow{v}}.$$
   Indication : comparer les parties linéaires des deux membres, puis calculer les images du point C.
3. Déduire de ce qui précède l'identité $s_A \circ s_B \circ s_C = s_C \circ s_B \circ s_A$.
4. Démontrer que cette composée est la symétrie centrale par rapport au point D, qui est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 7 — Soit $\mathscr{E}$ un plan affine. Rappelons que, une fois qu'une base $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est fixée, on définit l'aire algébrique d'un triangle ABC par
$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

1. Soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$. Démontrer l'identité
$$\mathscr{A}(f(A)f(B)f(C)) = \det(\overrightarrow{f}) \cdot \mathscr{A}(ABC)$$
   pour tous points A, B, C dans $\mathscr{E}$.
2. En déduire une démonstration du *lemme du demi-parallélogramme* : si $ABCD$ est un parallélogramme, alors
$$\mathscr{A}(ABD) = \mathscr{A}(BCD).$$
3. En déduire également une démonstration du *lemme des proportions* : si deux triangles ont un sommet commun B et des bases $[AC]$, $[A'C']$ portées par une même droite, alors
$$\frac{\mathscr{A}(ABC)}{\mathscr{A}(A'BC')} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$