L3 Mathématiques pour l'enseignement, 2020-21 — Géométrie élémentaire
Université Lyon 1

Feuilles d'exercices 3 : Dobble

Le *Dobble* est un jeu d'ambiance constitué de 55 cartes comportant chacune 8 symboles. Ces cartes ont une propriété remarquable : *deux cartes ont toujours un et un seul symbole en commun.* Il y a différentes façons de jouer, mais il s'agit toujours de reconnaître le plus rapidement possible le symbole apparaissant simultanément sur deux cartes données.

Exercice 1 [Une tentative naïve] — Essayons de construire directement un jeu de Dobble de manière inductive. Avec deux cartes, c'est facile : il suffit de choisir un symbole, disons A, et de fabriquer deux cartes identiques [A] et [A]. Pour passer à trois cartes, on peut choisir deux nouveaux symboles, disons B et C, puis considérer les trois cartes [AB], [AC] et [BC].

En généralisant ce procédé, décrire la construction d'un jeu de 55 cartes. Combien de symboles chacune de ces cartes contient-elle ?

La géométrie plane sur un corps fini $\mathbf{F}_p$ permet d'obtenir un résultat beaucoup plus satisfaisant. L'idée sous-jacente est simple : utiliser la condition bien connue :

dans le plan, deux droites distinctes se coupent en (au plus) un point

pour réaliser cette autre, plus exotique :

deux cartes ont un unique symbole en commun.

> Suivant cette idée, on est donc amené à prendre pour
> — *symboles* les points du plan $\mathbf{F}_p^2$;
> — *cartes* les droites de ce plan.
> Les points appartenant à une droite donnée déterminent les symboles apparaissant sur la carte associée à cette droite.

Exemple — Avec $p = 2$ et en posant

$$A = (\overline{0}, \overline{1}),\ B = (\overline{1}, \overline{0}),\ C = (\overline{0}, \overline{1}) \text{ et } D = (\overline{1}, \overline{1}),$$

nous obtenons les cartes

$$[AB], [AC], [AD], [BC], [BD] \text{ et } [CD].$$

Par construction, deux cartes distinctes de ce jeu ont exactement *un* ou *zéro* symbole commun, suivant que les droites correspondantes sont *sécantes* ou *parallèles*. Pour obtenir un véritable Dobble, il reste à faire disparaître les droites parallèles...

Exercice 2 [Un Dobble approximatif] — Combien le jeu que l'on vient de décrire contient-il de symboles ? Combien de cartes contient-t-il ? Combien de symboles figurent sur une carte donnée ?
(*Indication : utiliser l'exercice 6 de la fiche 1.*)

Exercice 3 [Parallèles] — Soit $\mathscr{D}$ une droite dans $\mathbf{F}_p^2$. Considérons une droite $\mathscr{D}_0$ sécante à $\mathscr{D}$ en un point A.

1. Démontrer que toute droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathscr{D}' = B + \overrightarrow{\mathscr{D}},$$

avec $B \in \mathscr{D}_0$.

2. En déduire qu'il existe exactement p droites parallèles à $\mathscr{D}$ (la droite $\mathscr{D}$ incluse).

Exercice 4 [Le cas $p = 2$] — Considérons le plan $\mathbf{F}_2^2$, formé des quatre points

$$A = (\overline{0}, \overline{0}),\ B = (\overline{1}, \overline{0}),\ C = (\overline{0}, \overline{1})\ et\ D = (\overline{1}, \overline{1}).$$

1. Donner la liste de toutes les droites du plan $\mathbf{F}_2^2$ et préciser les trois paires de droites parallèles.

Choisissons un nouveau symbole pour chaque paire de droites parallèles, disons E, F et G. On ajoute à chacune des cartes précédemment construite le symbole correspondant ; par exemple, si E correspond aux droites parallèles (AB) et (CD), on considère les cartes $[ABE]$ et $[CDE]$. On ajoute enfin la carte $[EFG]$.

2. Écrire toutes les cartes et vérifier que l'on vient de construire un Dobble à 7 cartes et 7 symboles, chaque carte contenant 3 symboles.

Exercice 5 [Le cas général] — En s'inspirant des exercices 3 et 4, expliquer comment modifier le jeu décrit dans l'encadré afin d'obtenir un Dobble. Préciser le nombre de cartes, le nombre total de symboles et le nombre de symboles sur chaque carte.

Exercice 6 — 1. Construire explicitement les treize cartes du jeu pour $p = 3$.

2. Le Dobble original contient 55 cartes. Sachant qu'il est incomplet et que l'on pourrait lui ajouter deux cartes, quel choix du nombre premier p permet-il de l'obtenir ?