Feuille 2, ex 5

Plan affine $\mathcal{E}$, muni d'un repère

$A, B \in \mathcal{E}$ distincts $\qquad A\,(x_A, y_A) \qquad B\,(x_B, y_A)$

Équation cartésienne pour (AB) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_B - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la première ligne.

Soit $M(x,y)$ dans $\mathcal{E}$

$M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix} x_B - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix} = 0.$$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

Ex. $\mathbb{R}^2$

$A(1,1)$ $B(2,3)$

$$(AB) : 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \end{vmatrix} = 2y + x + 3 - 2 - 3x - y$$

$$= -2x + y + 1$$

Exercice 6

Plan affine, muni d'un repère

On considère trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ d'équations cartésiennes

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont parallèles ou concourantes $\boxed{\text{ssi}}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On raisonne par double implication.

1) Supposons $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ concourantes en un pt $M(x_M, y_M)$. Alors

$$\begin{cases} a_1 x_M + b_1 y_M + c_1 = 0 \\ a_2 x_M + b_2 y_M + c_2 = 0 \\ a_3 x_M + b_3 y_M + c_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Cette matrice a un noyau non nul, elle n'est donc pas inversible et son déterminant est nul.

1b) On suppose $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ parallèles entre elles.

Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

$\mathcal{D}_1 : \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{D}_2 : \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{D}_3 : \begin{pmatrix} -b_3 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

développement / colonne 3

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= -c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ -b_2 & -b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ -b_1 & -b_3 \end{vmatrix} - c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{vmatrix} = 0$$

car $\begin{pmatrix} -b_i \\ a_i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b_j \\ a_j \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} -b_i & -b_j \\ a_i & a_j \end{vmatrix} = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ -b_i & -b_j \end{vmatrix} = 0.$$

2) Supposons réciproquement $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

Il existe dans ce cas un vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ <u>non nul</u> tel que

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0$, c'est-à-dire $\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 = 0 \\ a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 = 0 \end{cases}$

<u>Si</u> $z_0 \neq 0$, alors c'est gagné :

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{x_0}{z_0} + b_1 \dfrac{y_0}{z_0} + c_1 = 0 \\ a_2 \dfrac{x_0}{z_0} + b_2 \dfrac{y_0}{z_0} + c_2 = 0 \\ a_3 \dfrac{x_0}{z_0} + b_3 \dfrac{y_0}{z_0} + c_3 = 0 \end{cases}$$

et donc $M\left(\dfrac{x_0}{z_0}, \dfrac{y_0}{z_0}\right)$ appartient aux trois droites.

Que se passe-t-il si $z_0 = 0$? Alors

$$\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 = 0 \\ a_3 x_0 + b_3 y_0 = 0 \end{cases}$$

avec $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & -b_2 \\ a_3 & -b_3 \end{pmatrix}}_{\text{rang} \leq 2} \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Thm du rang pour $A = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & -b_2 \\ a_3 & -b_3 \end{pmatrix}$: $\quad 2 = \dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rg}(A)$

$\dim \operatorname{Ker}(A) \geq 1$, car $\operatorname{Ker}(A) \neq \{0\}$

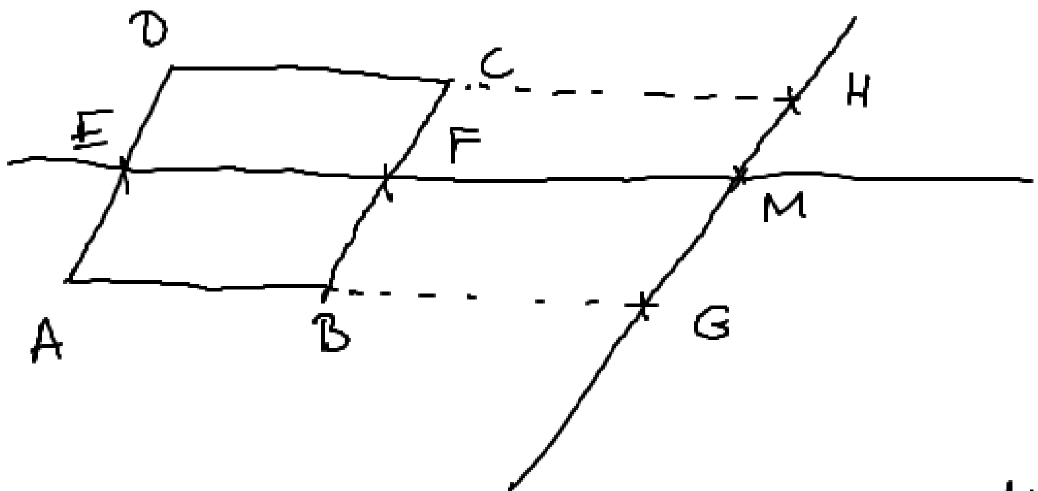
donc $\boxed{\operatorname{rg}(A) \leq 1}$. En particulier, toutes ses lignes sont colinéaires.

Conclusion : les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont colinéaires, donc ces droites sont parallèles.

Exemple d'application

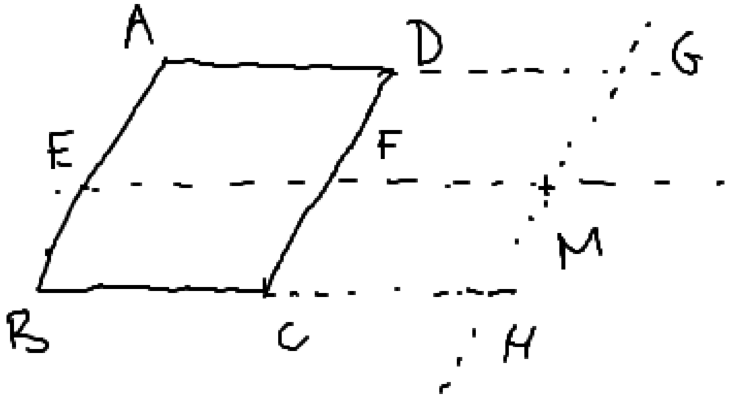
ABCD parallélogramme

$M \neq A, B, C, D$



(AC), (EH), (FG) sont tjs parallèles ou concourantes.

Repère affine : $\{A, B, D\}$



Repère $\{A, B, D\}$

Coordonnées : $A(0,0)$ $B(1,0)$ $D(0,1)$

$C(1,1)$

$M(x_M, y_M)$

(AC), (EH), (FG)

concourantes ou parallèles ?

$E(x_M, 0)$ $F(x_M, 1)$

$G(0, y_M)$ $H(1, y_M)$

(AC) : $x - y = 0$

(EH) : $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} 1-x_M \\ y_M \end{pmatrix}$

$y_M x - (1-x_M)y - x_M y_M = 0$

(FG)

$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} -x_M \\ y_M - 1 \end{pmatrix}$

$(y_M - 1)x + x_M y - x_M y_M = 0$

On va appliquer le critère de l'exercice 6 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ y_M & x_M - 1 & -x_M y_M \\ y_M - 1 & x_M & -x_M y_M \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ y_M & x_M - 1 & -x_M y_M \\ y_M & x_M - 1 & -x_M y_M \end{vmatrix} = 0$$

donc les trois droites (AC), (EH) et (FG) sont concourantes ou parallèles.

Complément : pour quels points M obtient-on des droites parallèles ?

C'est le cas si (AC) // (EH), donc si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 - x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc ssi $\begin{vmatrix} 1 & 1-x_M \\ 1 & y_M \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $\boxed{x_M + y_M - 1 = 0}$.

Cette condition signifie que M appartient à la droite d'équation

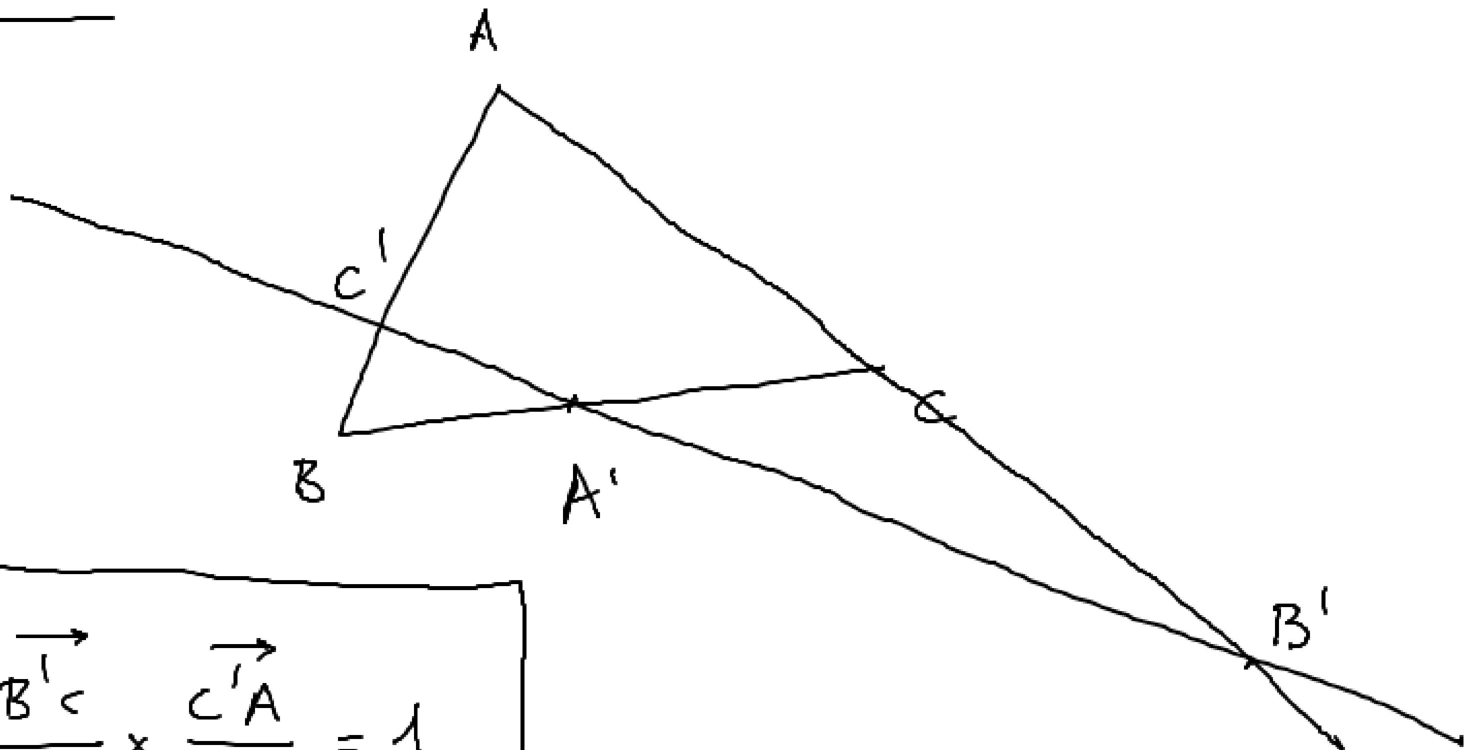
$$x+y-1=0.$$

Il s'agit de la dte (BD).

Cl. Les trois dtes sont // ssi $M \in (BD)$.

Ex 8

Thm de Ménélaüs



$$\boxed{\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \times \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1}$$

$\{\vec{i}, \vec{j}\}$ base de $\vec{\mathcal{E}}$

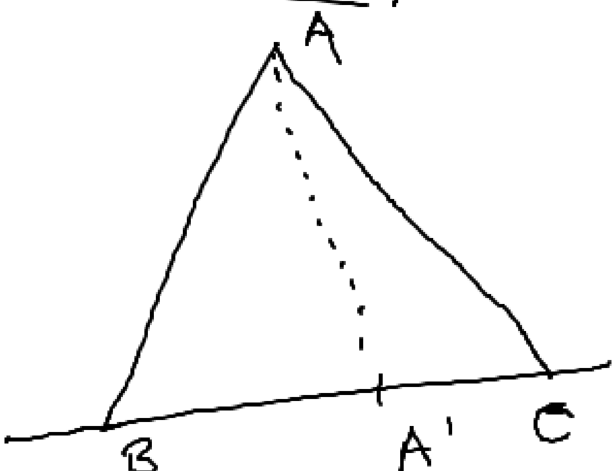
On utilise l'aire algébrique

$$\mathcal{A}(ABC) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \det_{\{\vec{i}, \vec{j}\}} (\vec{AB}, \vec{AC}).$$

Rq $\quad \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BCA) = \mathcal{A}(CAB)$

$\quad \mathcal{A}(BAC) = -\mathcal{A}(ABC)$

1) Lemme des proportions



$$\frac{\mathcal{A}(AA'B)}{\mathcal{A}(AA'C)} = \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}$$

$\vec{BA'} = \lambda \vec{BC}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA'} = \lambda \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA'} = -\overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{BC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{BC}\end{array}\right\} \text{donc } \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

$$\mathcal{A}(AA'B) = \mathcal{A}(BAA') = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}\right) = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{BA}, \lambda\overrightarrow{BC}\right) = \lambda\,\mathcal{A}(BAC)$$

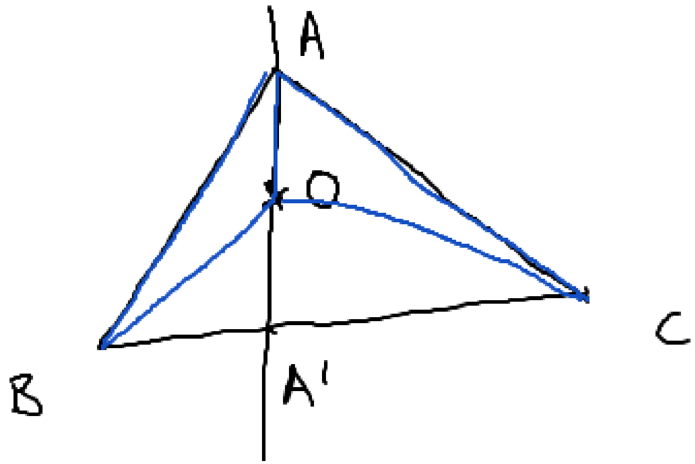
$$\mathcal{A}(AA'C) = \mathcal{A}(CAA') = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{CA}, \underbrace{(\lambda - 1)\overrightarrow{BC}}_{\substack{= -(\lambda-1)\overrightarrow{CB} \\ = (1-\lambda)\overrightarrow{CB}}}) = (1-\lambda)\,\mathcal{A}(CAB)$$

$$= (1-\lambda)\,\mathcal{A}(BCA)$$

$$= (\lambda - 1)\,\mathcal{A}(BAC)$$

$$\text{donc } \frac{\mathcal{A}(AA'B)}{\mathcal{A}(AA'C)} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}.$$

2) Lemme du chevron



$\vec{AO} = \mu \vec{AA'}$

$$\frac{\mathcal{A}(OAB)}{\mathcal{A}(OAC)} = \frac{\vec{A'B}}{\vec{A'C}}.$$

Rq : si $O = A'$, on retrouve le lemme des proportions (*)

$$\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(ABO) = \frac{1}{2}\det(\vec{AB}, \vec{AO}) = \mu\,\mathcal{A}(ABA') = -\mu\,\mathcal{A}(AA'B)$$

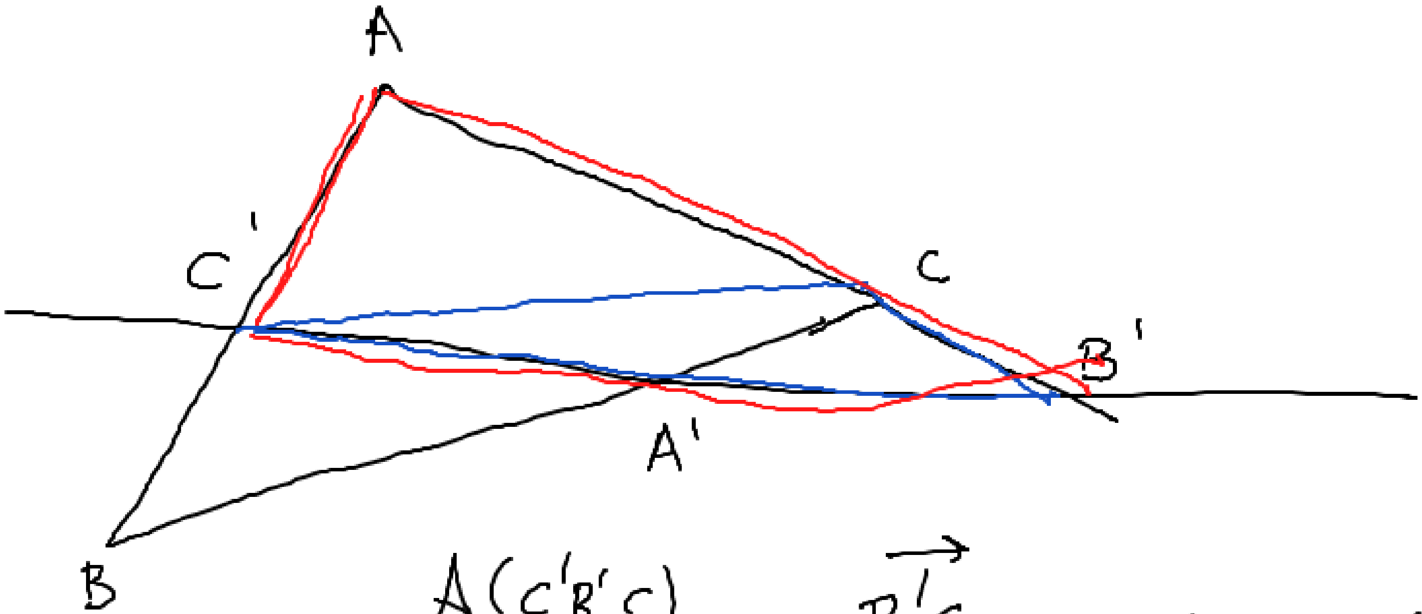
$$\mathcal{A}(OAC) = \mathcal{A}(ACO) = \frac{1}{2}\det(\vec{AC}, \vec{AO}) = \mu\,\mathcal{A}(ACA') = -\mu\,\mathcal{A}(AA'C)$$

On obtient :

$$\frac{\mathcal{A}(OAB)}{\mathcal{A}(OAC)} = \frac{\mathcal{A}(AA'B)}{\mathcal{A}(AA'C)} \overset{(*)}{=} \frac{\vec{A'B}}{\vec{A'C}}$$

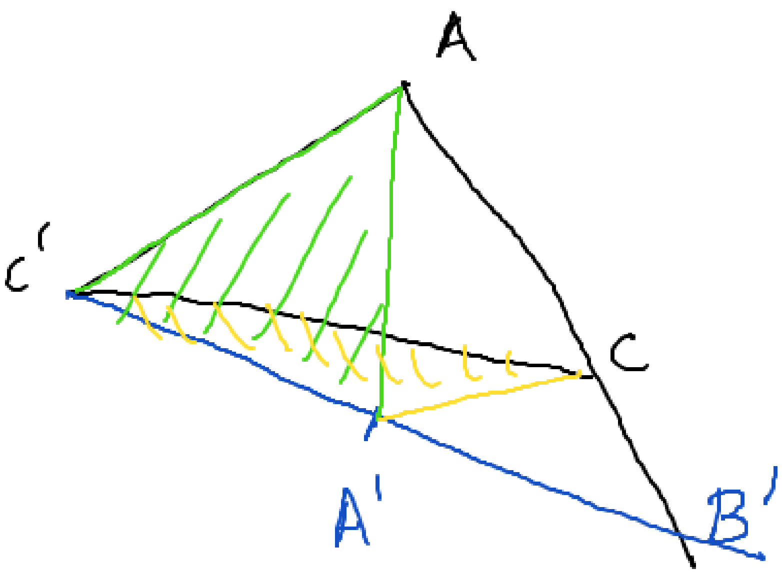
donc

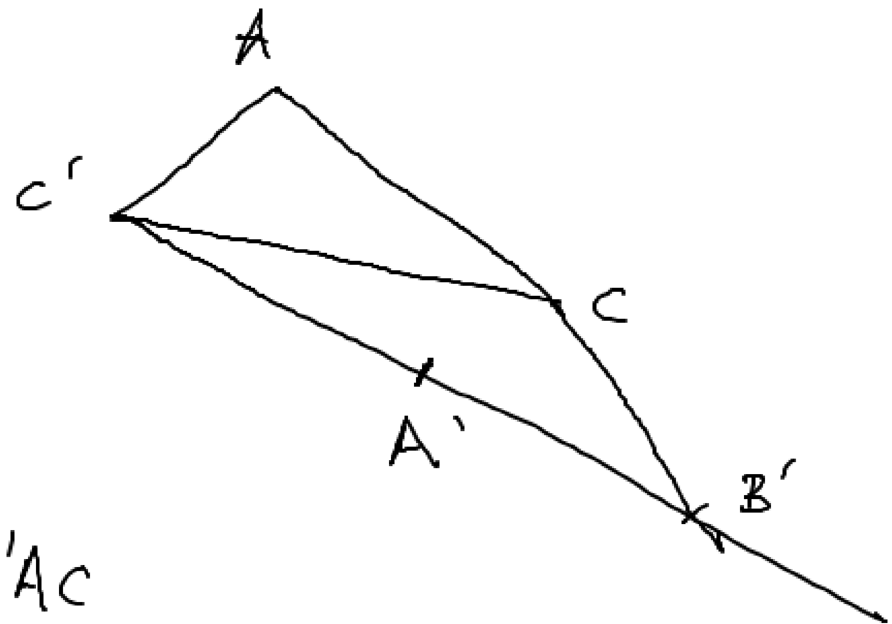
$$P = -\frac{\mathcal{A}(C'B'C)}{\mathcal{A}(C'AC)} + \frac{\mathcal{A}(A'C'A)}{\mathcal{A}(C'B'A)}$$



$$\frac{\mathcal{A}(C'B'C)}{\mathcal{A}(C'B'A)} = \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}$$ (lemme des proportions)

$$\frac{\mathcal{A}(A'C'A)}{\mathcal{A}(C'A'C)} = -\frac{\mathcal{A}(C'A'A)}{\mathcal{A}(C'A'C)} = -\frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}}$$ par le lemme du chevron





Triangle $C'AC$

Lemme du chevron : $C'A'A$ et $C'A'C$

Conclusion :

$$P = -\frac{\mathcal{A}(C'B'C)}{\mathcal{A}(C'A'C)} \times \frac{\mathcal{A}(A'C'A)}{\mathcal{A}(C'B'A)}$$

$$P = -\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \left(-\frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}}\right)$$

$$\boxed{P = 1}$$