FEUILLES D'EXERCICES 2 : ESPACES AFFINES

Exercice 1 [Repère affine] — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension n sur un corps K. Pour tous points $A_0, \ldots, A_n$ dans $\mathscr{E}$, démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) ces points ne sont pas contenus dans un sous-espace affine strict de $\mathscr{E}$;

(ii) les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_0}, \ldots, \overrightarrow{A_nA_0}$ forment une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Exercice 2 [Parallélogrammes] — Soit $\mathscr{E}$ un plan affine réel.

1. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tous points distincts A, B, C, D de $\mathscr{E}$:
   (i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
   (ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
   (iii) les segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leurs milieux.
2. Si les points A, B, C et D ne sont pas alignés, démontrer que les conditions précédentes sont encore équivalentes à $\big((AB) /\!/ (CD)$ et $(AD) /\!/ (BC)\big)$.
3. Démontrer le *théorème de Varignon* : les milieux des côtés d'un quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 3 [Plans dans l'espace] — Considérons l'espace affine $\mathbf{R}^3$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A\ (1, 2, 3)$ et dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
2. Déterminer un paramétrage du plan d'équation cartésienne $2x - y + z + 2 = 0$.

Exercice 4 [Plans et droites dans l'espace] — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

1. Donner un paramétrage de la droite $\mathscr{D}$ d'équations cartésiennes $x - 2y + z + 1 = 0$ et $2x - 3y - z + 3 = 0$.
2. Déterminer les points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y - z - 1 = 0$.
3. Donner un paramétrage de la droite $\mathscr{D}'$ passant par le point $A\ (1, 0, 1)$, faiblement parallèle au plan $\mathscr{P}$ et qui rencontre la droite $\mathscr{D}$.
4. Donner des équations cartésiennes de la droite $\mathscr{D}'$.

Exercice 5 [Équation d'une droite dans le plan] — Soit $A\ (x_A, y_A)$ et $B\ (x_B, y_B)$ deux points du plan affine K^2. Démontrer qu'un point $M\ (x, y,)$ de K^2 appartient à la droite (AB) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 6 [Trois droites dans le plan] — Considérons trois droites $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ dans le plan affine K^2, d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ et $a_3x + b_3y + c_3 = 0$.

Démontrer que ces trois droites sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 7 [On boucle!] — Considérons un triangle ABC non plat dans un plan affine sur un corps K. Partant d'un point M du segment $[BC]$, on construit successivement les points N, O, P, Q, R et S sur les segments $[CA], [AB], [BC], [CA], [AB]$ et $[BC]$ de telle sorte que la droite passant par deux points consécutifs de cette suite soit parallèle au côté du triangle ABC ne contenant pas ces points.

Démontrer que le point S est égal au point M.

Exercice 8 [Le théorème de Ménélaüs par les aires] — Soit $\mathscr{E}$ un plan affine réel. On munit le plan $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ d'une base, relativement à laquelle tous les déterminants seront calculés.

Étant donné trois points A, B, C dans $\mathscr{E}$, on rappelle que l'*aire algébrique* du triangle ABC est définie par

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\,\mathrm{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

1. Redémontrer le *lemme des proportions* (vu en cours) : si ABC est un triangle et A' est un point de (BC), alors
$$\frac{\mathscr{A}(AA'B)}{\mathscr{A}(AA'C)} = \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}.$$

2. Démontrer le *lemme du chevron* : si O est un point du plan tel que la droite (OA) intersecte (BC) en A', alors
$$\frac{\mathscr{A}(OAB)}{\mathscr{A}(OAC)} = \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}.$$

3. Soit ABC trois points non alignés dans $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{D}$ une droite qui n'est parallèle à aucun des côtés du triangle ABC. Désignons par A', B' et C' les points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec les droites $(BC), (AC)$ et (AB).

   Démontrer l'identité
$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1.$$

   Indication : identifier chaque rapport vectoriel à un rapport d'aire, puis conclure grâce au lemme des proportions et au lemme du chevron.