TD1

mercredi 27 janvier 2021 12:19

Exercice 1 : Soit V un e.v. de dim. finie sur K

Soit $f : V \to V$ linéaire tq $f^2 = f$. ($f(f(x)) = f(x)$ $\forall x \in V$)

$W = \ker f$, $W' = \operatorname{Im} f$

1) Mq. $V = W \oplus W'$

(en d'autres termes, mq. W et W' supplémentaires dans V)

c'est à dire $V = W + W'$ (a)

et $W \cap W' = \{0\}$ (b)

(a) • $W + W' \subset V$ car W et W' sont des s.e.v. de V

• Mq $V \subset W + W'$. Soit $x \in V$. Mq. $x = \underset{\in W}{y} + \underset{\in W'}{z}$

$$x = \underbrace{f(x)}_{\substack{\in \operatorname{Im} f \text{ par définition} \\ = W'}} + x - f(x)$$

Il reste à montrer que $x - f(x) \in W = \ker f$

$$f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x))$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

Donc $x \in W + W'$, et donc $V = W + W'$.

(b) Mq $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

On a $f(x) = 0$ car $x \in \ker f$

Il existe y tq $f(y) = x$ car $x \in \operatorname{Im} f$

Donc $f(f(y)) = f(x)$. Donc $x = f(x) = 0$

$$\begin{array}{c} f(f(y)) \\ \shortparallel \\ f(y) \\ \shortparallel \\ x \end{array}$$

On a bien $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

$$\boxed{V = W \oplus W'}.$$

2) Construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{q} \end{array} \\ \begin{array}{c} p \updownarrow \\ q \updownarrow \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

avec $0 \leq p \leq \dim V$ et $p+q = \dim V$

Posons $p = \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)$

(rappel : théorème du rang $\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$)

Posons $q = \dim(\operatorname{Ker} f)$.

On a bien $p+q = \dim V$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Im} f$

$(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ ———————— $\operatorname{Ker} f$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Calculons $f(e_i)$.

$e_i \in \operatorname{Im} f$, donc $\exists u \in V$ tq $f(u) = e_i$.

$$\underbrace{f(f(u))}_{\substack{\parallel \\ f(u) \\ \parallel \\ e_i}} = f(e_i)$$

Donc $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, on a bien $f(e_i) = e_i$.

Soit $i \in \{p+1, \dots, p+q\}$, on a $f(e_i) = 0$ par déf. car $e_i \in \operatorname{Ker} f$

Donc la matrice de f dans la base $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$ est :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} e_1 & \cdots & e_p & e_{p+1} & \cdots & e_{p+q} \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_{p+q} \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & & & & \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & & & & & \end{array}\right) \end{array}$$

Exercice 2 : $\mathbb{R}^3$

jeudi 28 janvier 2021 11:16

1) éq. cartésienne du plan vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que u et v sont non colinéaires donc ils engendrent bien un plan.

1ère méthode : $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(u, v)$

Donc tout vecteur $w \in \mathcal{P}$ s'écrit comme combinaison linéaire de u et v.

Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$. $w = au + bv$

$$\begin{cases} x = b \\ y = 2a - b \\ z = a \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2a - x \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \boxed{y = 2z - x}$$

2ème méthode : On calcule un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$.

$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Tout vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ satisfait $\vec{w} . n = 0$

car $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{x + y - 2z = 0}$$

② P plan // à $\mathcal{P}$ et passe par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$. Alors $\overrightarrow{AC} \in P$. $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à P, donc $\vec{AC} . \vec{n} = 0$

$\vec{AC} . \vec{n} = (x-1) + y - 2(z-1) = 0$ $\quad \boxed{x + y - 2z = -1}$

$\vec{AC}.\vec{n} = (x-1) + y - 2(z-1) = 0$ $\boxed{x + y - 2z = -1}$

jeudi 28 janvier 2021 12:37

③ Soit P' le plan // à P et contenant le point $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur normal $\vec{n}$ à P est aussi normal à P'.

Soit $D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P'$. Alors $\overrightarrow{BD} \in P'$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = 0$

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$. $\quad \overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = x + (y-1) - 2z = 0$

$$\boxed{x + y - 2z = 1}$$

④ (Rappel : $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix}$)

Du coup, le milieu de $[AB]$ pour $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le point C de coordonnées $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

(Rappel : Tous les plans parallèles à un plan d'équation $ax + by + cz = d$ ont une équation de la forme $ax + by + cz = d'$ avec $d' \in \mathbb{R}$)

Soit P'' le plan parallèle à P passant par $C\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

P'' a pour équation $x + y - 2z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

On a juste à déterminer la valeur de d.

$C \in P''$ donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = d = 0$.

L'équation de P'' est donc $\underline{x + y - 2z = 0}$

Exercice 3 : K corps, V un K-e.v.

jeudi 28 janvier 2021 12:58

$f : V \to V$ tq v et $f(v)$ colinéaires $\forall v \in V$.

① $\forall v \in V, \exists \alpha \in K, f(v) = \alpha v$

② Une homothétie vectorielle est une application linéaire qui multiplie tous les vecteurs par une constante $\beta \in K^*$

$\exists \beta \in K^*, \forall v \in V, f(v) = \beta v$

③ Mq soit $f = 0$ soit f homothétie.

- Si $f = 0$, on a bien $\forall v \in V$, $f(v) = 0$
$= 0 . v$

- Supposons maintenant que $f \neq 0$ vérifie ①. Mq f homothétie.

Soit $v_0 \in V$. On a $f(v_0) = \alpha_0 v_0$ pour un certain $\alpha_0 \in K$.
On veut montrer que pour tout $v_1 \in V$, alors $f(v_1) = \alpha_0 v_1$ pour le même α_0.

* Soit $v_1 \in V$ colinéaire à v_0, c.a.d. $v_1 = k v_0$ avec $k \in K$.
On a $f(v_1) = f(k v_0) = k f(v_0)$
$= k \alpha_0 v_0$ (car $f(v_0) = \alpha_0 v_0$)
$= \alpha_0 v_1$ (car $v_1 = k v_0$)

* Soit $v_1 \in V$ non colinéaire à v_0. On note $f(v_1) = \alpha_1 v_1$.
On veut m.q. $\alpha_1 = \alpha_0$.

Calculons $f(v_0 + v_1) = f(v_0) + f(v_1)$
$= \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1$

D'autre part $f(v_0 + v_1) = \alpha_2 (v_0 + v_1)$ avec $\alpha_2 \in K^*$.

Donc $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 = \alpha_2 (v_0 + v_1)$

$\iff (\alpha_0 - \alpha_2) v_0 + (\alpha_1 - \alpha_2) v_1 = 0$

(v_0, v_1) est une famille libre donc $\alpha_0 - \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

(v_0, v_1) est une famille libre donc $\alpha_0 - \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$. $\square$