Exercice 1 – V espace vectoriel de dim finie sur un corps K.

$f : V \to V$ application linéaire telle

$f^2 = f$.

$$W = \ker(f)$$
$$W' = \mathrm{im}(f)$$

1) $V = W \oplus W'$

Rappel : $V = W \oplus W' \iff$ tout $v \in V$ s'écrit de manière unique $v = w + w'$ avec $w \in W$ et $w' \in W'$.

$v = w_1 + w_1'$

$v = w_2 + w_2'$

$W \cap W' = \{0\}$

$0 = (w_2 - w_1) + (w_2' - w_1')$

$w_1 - w_2 = w_2' - w_1' \in W \cap W'$

$V = W + W' \iff$ écriture analogue, pas forcément unique.

$W = \ker(f)$

$W' = \operatorname{im}(f)$

$\boxed{f^2 = f}$

$*\ W \cap W' = (0)$

$v \in W \cap W'$

On sait : $v \in W$, donc $f(v) = 0$.

$v \in W'$, donc $v = f(u)$ pour un certain $u \in V$

$$0 = f(v) = f(f(u)) = f^2(u) \overset{*}{=} f(u) = v.$$

$\boxed{f^2 = f \circ f}$

Ainsi, $W \cap W' = (0)$.

$\operatorname{rg}(f) \overset{\text{déf}}{=} \dim \operatorname{im}(f)$

$*\ V = W + W'$

$$\dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$$

$$= \dim(W) + \dim(W')$$

$$= \dim \ker(f) + \operatorname{rg}(f) \overset{*}{=} \dim(V)$$

*: thm du rang.

On a donc $\boxed{W + W' = V}$

Variante pour $V = W + W'$.

$v \in V$ $\qquad v \overset{?}{=} w + w'$ $\qquad w \in W = \ker(f)$

$w' \in W' = \operatorname{Im}(f)$

<u>Analyse</u> - synthèse

Si $\quad v = w + w'$ $\qquad w \in W$

$w' \in W'$ $\qquad w' = f(u)$

$= w + f(u)$

alors $\quad f(v) = f(w + f(u)) = f(w) + f^2(u) = f^2(u) = f(u)$

$= w'$

donc on doit nécessairement avoir $\boxed{w' = f(v)}$ et

alors $\boxed{w = v - f(v)}$.

Synthèse   Je pose $w = v - f(v)$

$w' = f(v)$

$w + w' = (v - f(v)) + f(v) = v$.

$w' = f(v) \in \mathrm{im}(f) = W'$

$f(w) = f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = f(v) - f(v) = 0$

donc $w \in W$.

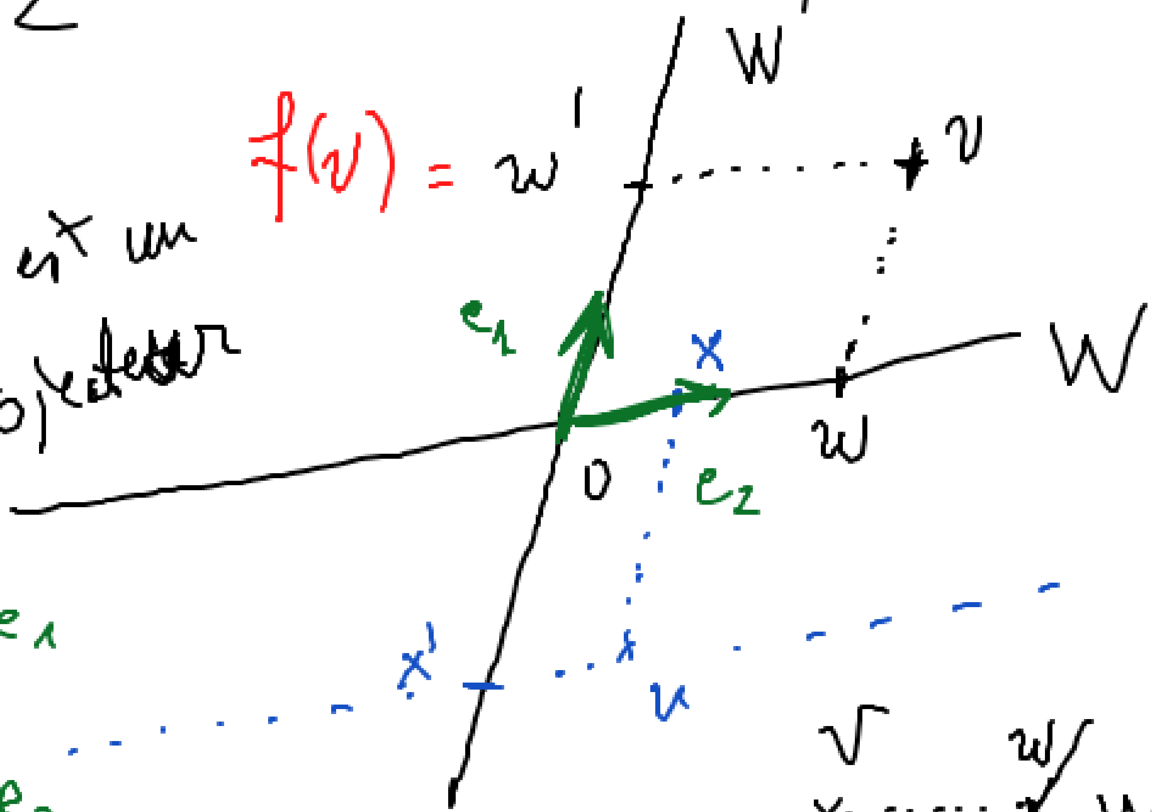
$$\boxed{v = (v - f(v)) + f(v)}$$

$v = w + w'$

$\dim(V) = 2$

$\boxed{f^2 = f} \longleftrightarrow$ f est un projecteur

$\color{red}{f(v)} = w'$



$f(v) = w'$

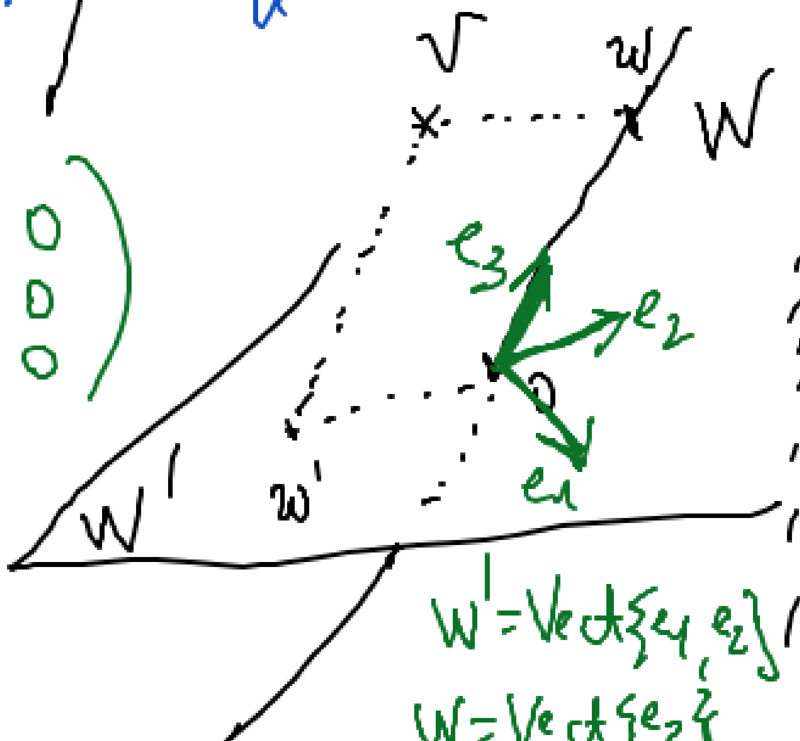
$u = x + x'$

$f(u) = x'$

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

$\dim(V) = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$W' = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$

$W = \mathrm{Vect}\{e_3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n = \dim V$

2) $f \in \mathrm{End}(V)$, $f^2 = f$

Dans une base bien choisie de V, la matrice de f est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0_{pq} \\ \hline 0_{qp} & 0_q \end{array}\right)$$

$n = \dim V = \dim \ker f + \mathrm{rg}\, f$

$n = \dim W + p = q + p$

$p = \dim W$

$= \mathrm{rg}(f)$

$q = n - p = \dim W'$

On choisit une base $\{e_1, \dots, e_p\}$ de W'

$\longrightarrow$ une base $\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ de W

Comme $V = W \oplus W'$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de V

telle que $f(e_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq p$

$f(e_i) = 0$ pour $p+1 \leq i \leq n$

Ainsi, la matrice de f dans cette base

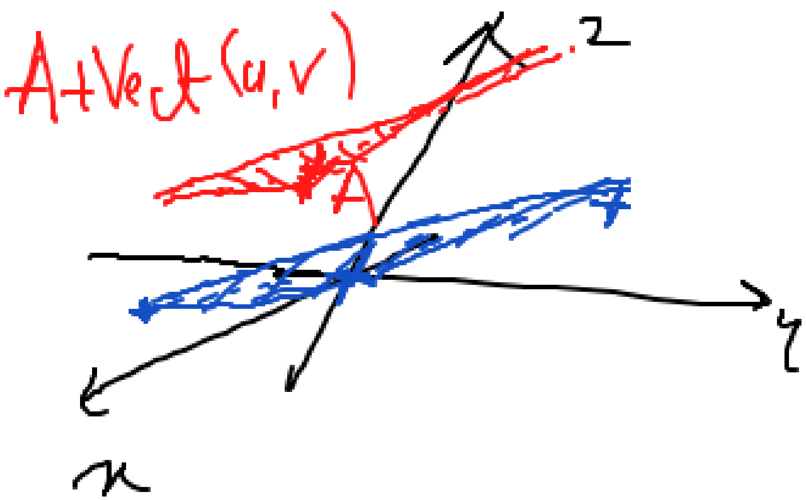
est
$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0_{pq} \\ \hline 0_{qp} & 0_q \end{array}\right).$$

$\boxed{f^2 = f} \Rightarrow$ la matrice de f dans une base bien choisie est diagonale, avec que des 1 et des 0 sur la diagonale.

$\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $P = \mathrm{Vect}(u,v)$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff$ le système $\begin{cases} 0.\lambda + \mu = x \\ 2\lambda - \mu = y \\ \lambda + 0.\mu = z \end{cases}$ d'inconnues λ, μ

a une solution

$$\begin{cases} \mu = x \\ 2\lambda - \mu = y \\ \lambda = z \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda = z \\ \mu = x \\ 2\lambda - \mu = y \end{cases}$$

$\boxed{\text{Pivot de Gauss}}$

$\sim$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 + L_2$

$$\begin{cases} \lambda = z \\ \mu = x \\ \boxed{0 = y - 2z + x} \end{cases}$$

Condition nécessaire et suffisante pour avoir une solution

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y - 2z = 0 \right\}$$

$A = (1,0,1)$

$A + \mathrm{Vect}(u,v)$

$M = (x,y,z) \in A + \mathrm{Vect}(u,v) \Leftrightarrow$

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mu = x - 1 \\ 2\lambda - \mu = y \\ \lambda = z - 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \mu = x - 1 \\ 2\lambda - \mu = y \\ \lambda = z - 1 \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ \mu = x - 1 \\ 2\lambda - \mu = y \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 + L_2}{\sim} \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ \mu = x - 1 \\ 0 = (y - 2z + x) + 1 \end{cases}$$

Le plan $A + \mathrm{Vect}(u, v)$ a pour équation

$$\boxed{x + y - 2z = -1}$$

$B(0,1,0)$

3) $B + \mathrm{Vect}(u,v)$ a pour équation

$$x + y - 2z = 1$$

4) Milieu de $[AB]$: $I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

$$I = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$I + \mathrm{Vect}(u,v)$ a pour équation : $\boxed{x + y - 2z = 0}$