EXAMEN TERMINAL

Jeudi 27 mai 2021 - Durée : 2h

Ce sujet comporte un exercice et deux problèmes. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir une bonne note ; privilégiez la qualité à la quantité !
Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.

Exercice — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Considérons une famille de points pondérés $(A_1, m_1), \ldots, (A_r, m_r)$ de $\mathscr{E}$ telle que $\sum_{i=1}^{r} m_i = 0$ et posons

$$f(M) = \sum_{i=1}^{r} m_i MA_i^2.$$

1. Vérifier que le vecteur
$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{r} m_i \overrightarrow{OA_i}$$
ne dépend pas du point $O \in \mathscr{E}$, puis que l'on a
$$f(M) = f(O) - 2(\overrightarrow{OM} | \overrightarrow{u})$$
pour tous points $O, M \in \mathscr{E}$.
2. En déduire une description de la ligne de niveau $\{M \in \mathscr{E} \mid f(M) = k\}$ pour tout $k \in \mathbf{R}$.

Supposons maintenant que $\mathscr{E}$ soit de dimension 2 et considérons un triangle non plat ABC dans $\mathscr{E}$. On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

3. Démontrer que l'ensemble $\Delta_A = \{M \in \mathscr{E} \mid MB^2 + b^2 = MC^2 + c^2\}$ est la hauteur du triangle ABC issue de A.
4. En déduire une nouvelle démonstration du concours des hauteurs d'un triangle.

Problème 1 — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3.

Considérons deux droites $\mathscr{D}_1 = A_1 + \mathbf{R}\overrightarrow{v_1}$ et $\mathscr{D}_2 = A_2 + \mathbf{R}\overrightarrow{v_2}$ dans $\mathscr{E}$, que l'on suppose *non coplanaires*. La *distance* entre $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est le nombre réel défini par

$$d(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = \inf_{M_1 \in \mathscr{D}_1, M_2 \in \mathscr{D}_2} M_1 M_2.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ possèdent une unique perpendiculaire commune, puis d'en déduire une méthode de calcul de la distance entre $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

1. Démontrer qu'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{v_3}$ orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

Considérons les plans $\mathscr{P}_1 = A_1 + \mathbf{R}\overrightarrow{v_1} + \mathbf{R}\overrightarrow{v_3}$ et $\mathscr{P}_2 = A_2 + \mathbf{R}\overrightarrow{v_2} + \mathbf{R}\overrightarrow{v_3}$.

2. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ et le plan $\mathscr{P}_2$ s'intersectent en un unique point B_1. Démontrer de même que la droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}_1$ s'intersectent en un unique point B_2.
3. Déterminer l'intersection des plans vectoriels $\overrightarrow{\mathscr{P}_1}$ et $\overrightarrow{\mathscr{P}_2}$.

4. En déduire que la droite (B_1B_2) est perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
5. Supposons que $\mathscr{D}$ soit une droite perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Démontrer que l'on a $\mathscr{D} = (B_1B_2)$.
6. Pour tous points $M_1 \in \mathscr{D}_1$ et $M_2 \in \mathscr{D}_2$, établir l'égalité

$$M_1M_2^2 = B_1B_2^2 + ||\overrightarrow{B_1M_1} + \overrightarrow{B_2M_2}||^2.$$

7. En déduire la distance entre $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
8. Supposons $\mathscr{E} = \mathbf{R}^3$. Appliquer le raisonnement précédent pour calculer la distance entre les droites

$$\mathscr{D}_1 = (1,0,0) + \mathbf{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 = (0,1,0) + \mathbf{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Problème 2 — Soit ABC un triangle non plat dont les trois angles sont aigus. On pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. On désigne par A', B' et C' les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement.

Ce problème comporte deux parties indépendantes : on calcule dans la première les coordonnées barycentriques de l'orthocentre du triangle ABC et, dans la seconde, on démontre que le triangle $A'B'C'$ est un triangle de lumière.

Première partie

Soit H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Établir l'identité

$$b\cos(\widehat{C}) \cdot \overrightarrow{A'B} + c\cos(\widehat{B}) \cdot \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}.$$

Indication : on pourra calculer $A'B$ et $A'C$.

2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que H soit le barycentre des points pondérés $(A, \lambda), (B, b\cos(\widehat{C}))$ et $(C, c\cos(\widehat{B}))$.
3. De manière analogue, prouver qu'il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que H soit le barycentre des points pondérés $(A, a\cos(\widehat{C})), (B, \mu)$ et $(C, c\cos(\widehat{A}))$.
4. En déduire les coordonnées barycenriques de H dans le repère affine $\{A, B, C\}$.

Seconde partie

1. Démontrer que les points A, B, A' et B' sont cocycliques.
2. En déduire l'égalité d'angles orientés

$$2(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'A}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}}).$$

3. En observant que A' et B sont du même côté de la droite (AB'), quelle égalité d'angles géométriques peut-on en déduire ?
4. Démontrer de même l'égalité d'angles géométriques $\widehat{C'A'A} = \widehat{C'CA}$.
5. Déduire de ce qui précède l'égalité d'angles géométriques

$$\widehat{B'A'A} = \widehat{C'A'A}.$$

Indication : considérer les triangles ABB' et ACC'.

6. Démontrer que le triangle $A'B'C'$ est un *triangle de lumière*, c'est-à-dire que les côtés de ABC sont les bissectrices extérieures du triangle $A'B'C'$.