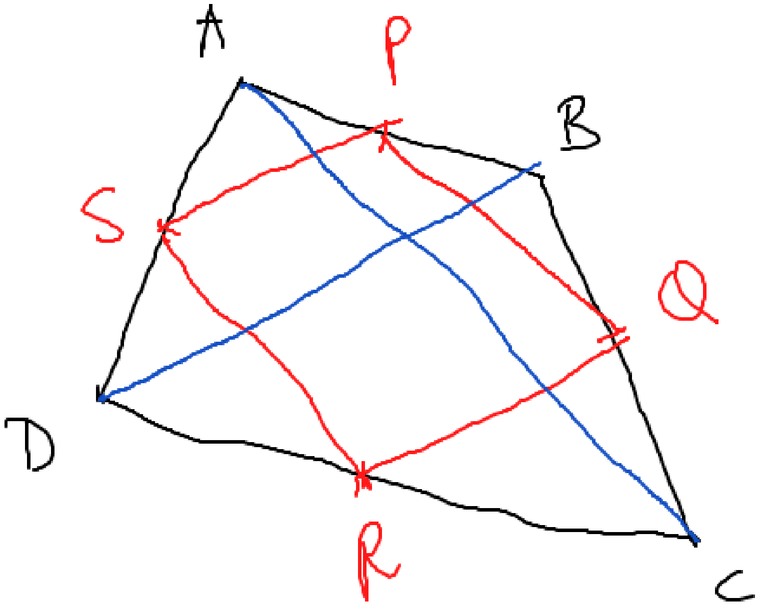
Feuille 2

Exercice 2

3) Thm de Varignon



ABCD un quadrilatère plan

PQRS est un parallélogramme

Supposons P, Q, R et S non alignés.

PQRS est un parallélogramme si

$(PQ) // (RS)$ et $(PS) // (RQ)$

Dans le triangle ABC, (PQ) // (AC) car P est le milieu de [AB] et Q est le milieu [BC], par application de la réciproque du théo. de Thalès.

Dans le triangle ADC, (RS) // (AC) car R milieu de [DC] et S milieu de [AD].

Dans le triangle DAB, (SP) // (BD) car S milieu de [AD] et P milieu de [AB]

Dans le triangle DCB, (QR) // (BD) car Q milieu de [BC] et R milieu de [CD].

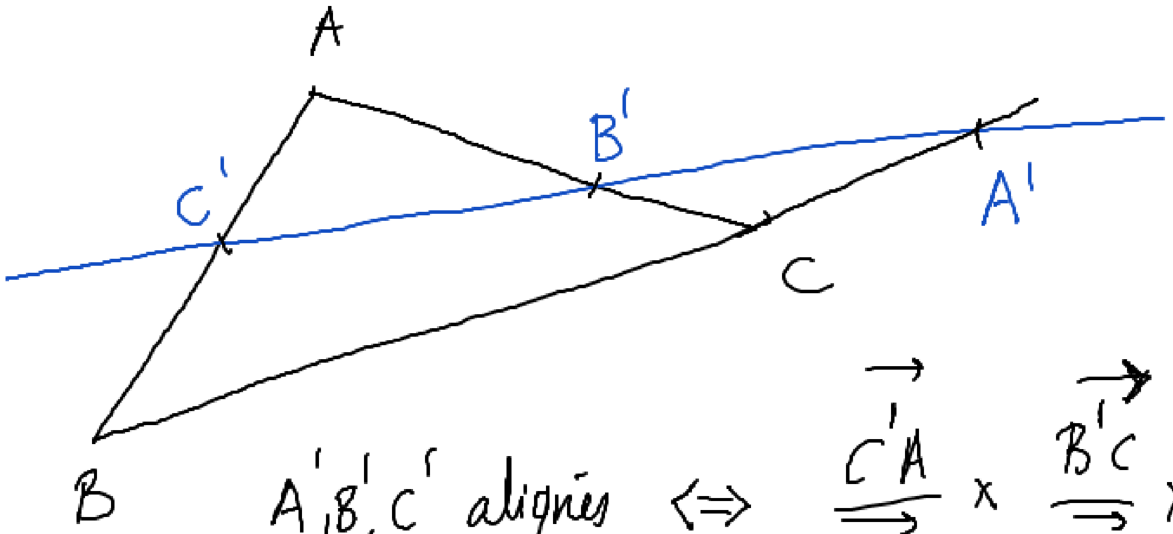
Conclusion : $(PQ) \parallel (AC)$ et $(RS) \parallel (AC)$, donc $(PQ) \parallel (RS)$

$(SP) \parallel (BD)$ et $(QR) \parallel (BD)$, donc $(SP) \parallel (QR)$

Ainsi, le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

Exercice 8 —

3) Thm de Ménélaüs



A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} \times \dfrac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \dfrac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = 1$

$\Rightarrow$

$$\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\mathcal{A}(A'C'A)}{\boxed{\mathcal{A}(A'C'B)}}$$ (lemme des proportions)

$$\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\mathcal{A}(A'B'C)}{\mathcal{A}(A'B'A)}$$ (idem)

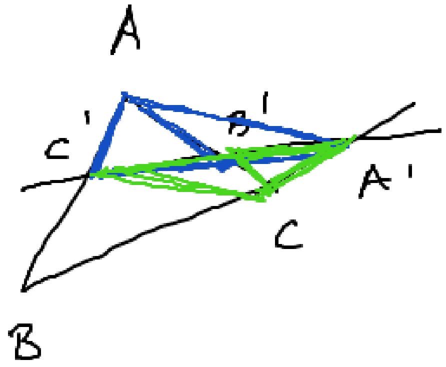
$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{\boxed{\mathcal{A}(C'A'B)}}{\mathcal{A}(C'A'C)}$$ (idem)

simplification

$$\frac{\mathcal{A}(C'A'B)}{\mathcal{A}(A'C'B)} = -1.$$

On obtient : avec $P = \dfrac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} \times \dfrac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \dfrac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}$,

$$P = -\frac{\boxed{\mathcal{A}(A'C'A)}}{\boxed{\mathcal{A}(C'A'C)}} \times \frac{\boxed{\mathcal{A}(A'B'C)}}{\boxed{\mathcal{A}(A'B'A)}}$$

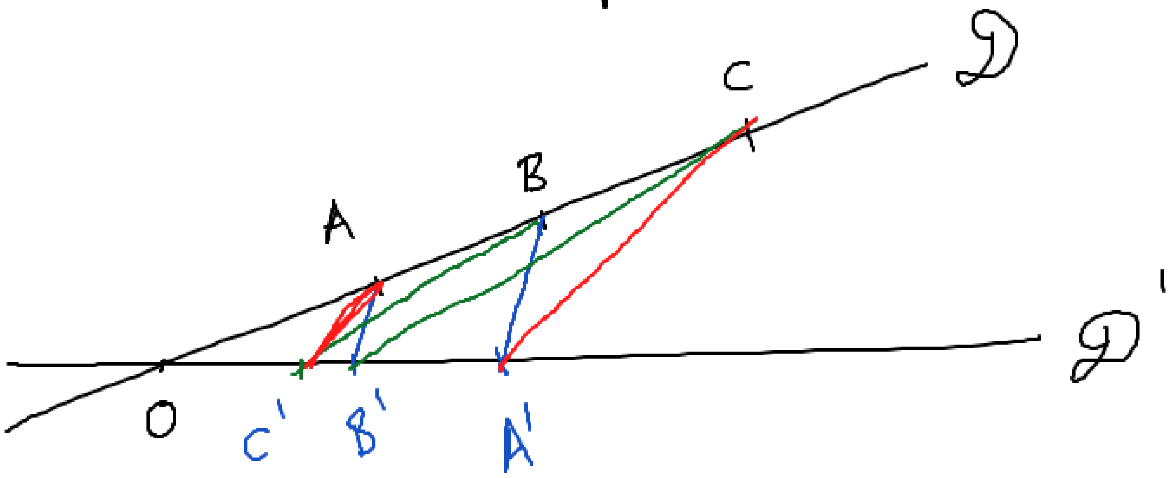


$$\frac{\mathcal{A}(A'C'A)}{\mathcal{A}(A'B'A)} = \frac{\mathcal{A}(AA'C')}{\mathcal{A}(AA'B')} = \boxed{\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'B'}}}$$

$$\frac{\mathcal{A}(A'B'C)}{\mathcal{A}(C'A'C)} = \frac{\mathcal{A}(CA'B')}{\mathcal{A}(CC'A')} = -\frac{\mathcal{A}(CA'B')}{\mathcal{A}(CA'C')} = -\boxed{\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}}$$

Conclusion : $P = 1$.

Exercice 3 — Thm de Pappus



Si $\begin{cases} (AB') \parallel (BA') \\ (BC') \parallel (CB') \end{cases}$,

alors $(AC') \parallel (CA')$

Démonstration 1 : avec Thalès (et sa réciproque)

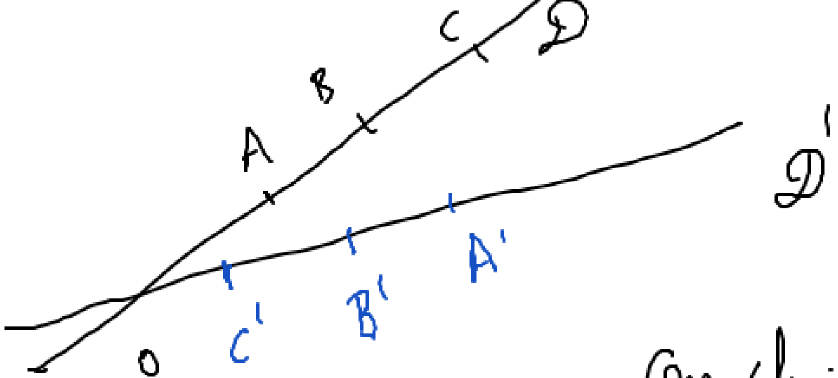
$(AB') \parallel (BA')$ donc $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}} = \dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OA'}}$

$(BC') \parallel (CB')$ donc $\overrightarrow{OB} / \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC'} / \overrightarrow{OB'}$

On en déduit :

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}} \times \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OA'}} \times \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OB'}} = \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OA'}},$$

d'où $(AC') \parallel (A'C)$



Démonstration 2

On choisit un repère affine d'origine O et d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

$A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$

$A'(0,a')$, $B'(0,b')$, $C'(0,c')$

$\overrightarrow{AB'}\begin{pmatrix}-a\\ b'\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA'}\begin{pmatrix}-b\\ a'\end{pmatrix}$

$(AB') \parallel (BA') \iff \overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{BA'}$ colinéaires

$\iff \begin{vmatrix}-a & -b\\ b' & a'\end{vmatrix} = 0$

$\iff \boxed{bb' = aa'}$

De même,

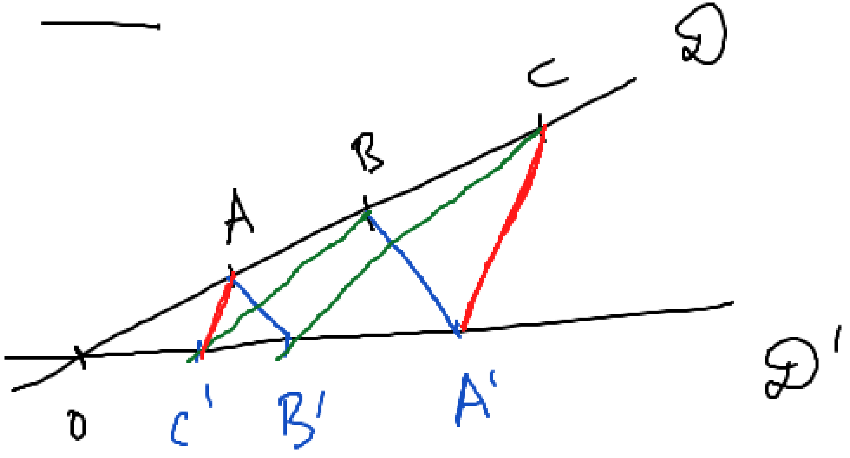
$(BC') \parallel (CB') \iff \boxed{bb' = cc'}$

Conclusion

$aa' = cc'$, donc $\begin{vmatrix}-a & -c\\ c' & a'\end{vmatrix} = 0$ et $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{CA'}$ sont colinéaires.

Ainsi, $(AC') \parallel (CA')$

Démonstration 3



Soit h l'homothétie de centre O telle que $h(A)=B$. Son rapport est $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}$.

Soit g l'homothétie de centre O tq. $g(B)=C$. Son rappor est $\dfrac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OB}}$.

h transforme (AB') en la dte parallèle à (AB') passant par $B=h(A)$, donc en la droite (BA'). Par ailleurs $h(\mathcal{D}')=\mathcal{D}'$. On en déduit : $\boxed{h(B')=A'}$.

Idem pour g : g transforme (BC') en (CB') et $\boxed{g(C')=B'}$.

$h(B') = A'$, $g(C') = B'$.

Par construction, $g \circ h(A) = C$.

$g \circ h$ est une homothétie de centre O. On a : $g \circ h = h \circ g$

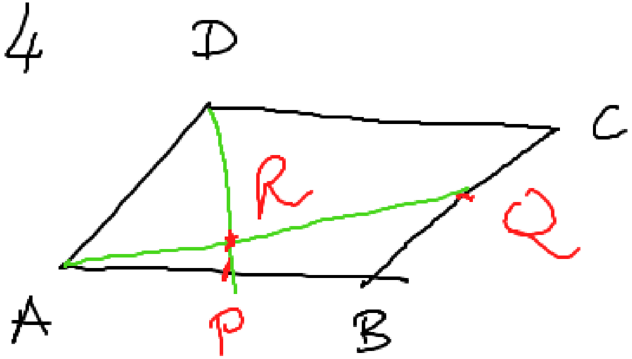
car g et h sont des homothéties de même centre.

On en déduit : $g \circ h\,(C') = h \circ g(C') = h\,(B') = A'$

Ainsi, $g \circ h$ transforme (AC') en (CA') et, donc,

$(CA') \,/\!/\, (AC')$.

Exercice 4



ABCD parallélogramme non aplati dans un plan affine $\mathcal{E}$

$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ affine telle que

$$f(A) = (0,1), \quad f(C) = (1,0), \quad f(D) = (0,0).$$

1) $$f(B) = f(D + \overrightarrow{DB}) = f(D + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) = f(D) + \vec{f}\,(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) = f(D) + \overrightarrow{f(D)f(A)} + \overrightarrow{f(D)f(C)}$$

$$= (0,0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,1).$$

2) $f(P) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$f(Q) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

$f(R) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$\{R\} = (D_P) \cap (AQ)$

$$\begin{cases} (AQ) : x + 2y - 2 = 0 \\ (DP) : \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \end{cases}$$

Les applications affines préservent les rapports vectoriels donc

$$\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{RD}} = \frac{\overrightarrow{f(R)f(P)}}{\overrightarrow{f(R)f(D)}} = -\frac{1}{4}.$$

Idem $\frac{\overrightarrow{RQ}}{\overrightarrow{RA}} = -\frac{3}{2}$.