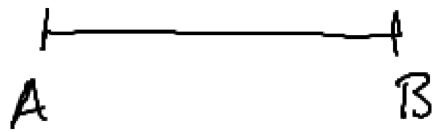
Convexité

$K = \mathbb{R}$

$A, B \in \mathcal{E}$ $\qquad [A,B] = \{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \,,\ \lambda \geq 0 \text{ et } \lambda \leq 1 \}$



$= \{ M \in \mathcal{E} \mid M = \text{barycentre de } \{(A,t),(B,1-t)\} \text{ avec } 0 \leq t \leq 1 \}$

[Preuve : cf. TD5]

$= \{ M \in \mathcal{E} \mid M = \text{barycentre de } \{(A,m_A),(B,m_B)\} \text{ avec } m_A, m_B \geq 0 \text{ et } m_A + m_B > 0. \}$

Déf – On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est <u>convexe</u> si, pour tous points $A, B \in \mathcal{C}$, $[AB] \subset \mathcal{C}$.

Ex

Exemples :

* $[AB]$ est une partie convexe

* (AB) est une partie convexe

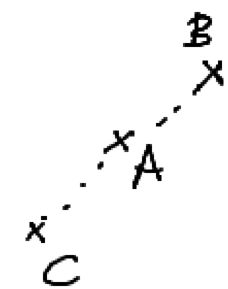
* Tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est convexe

[$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ sous-espace affine

$A, B \in \mathcal{F}$ $\quad$ $M \in [AB] \subset \mathcal{E}$ $\quad$ $M =$ barycentre de $\{(A, \lambda), (B, 1-\lambda)\}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$

Comme $\mathcal{F}$ est stable par barycentration, $M \in \mathcal{F}$. Ainsi, $[AB] \subset \mathcal{F}$]

* $\mathcal{E} \setminus \{A\}$ (complémentaire du pt. A)



On choisit $B, C \in \mathcal{E} \setminus \{A\}$ tels que A soit le milieu de $[BC]$

$B, C \in \mathcal{E} \setminus \{A\}$ mais $[BC] \not\subset \mathcal{E} \setminus \{A\}$, donc $\mathcal{E} \setminus \{A\}$ n'est pas convexe

Caractérisation :

$\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est une partie convexe si et seulement si, pour tous points $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{C}$ et tous scalaires $m_1, \dots, m_r \boxed{\geq 0}$ avec $M = \sum_{i=1}^{r} m_i \neq 0$, le barycentre de $\{(A_1, m_1), \dots, (A_r, m_r)\}$ est dans $\mathcal{C}$.

Autrement dit : $\mathcal{C}$ est stable par barycentration à poids **positifs**

Dém. $\boxed{\text{CN}}$ On suppose $\mathcal{C}$ convexe. Récurrence sur $r \geq 2$.

* $r = 2$: $m_1, m_2 \geq 0$, $m_1 + m_2 \neq 0$. $G = \mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), (A_2, m_2)\}$

$\in [A_1A_2]$ car $m_1, m_2 \geq 0$

$[A_1A_2] \subset \mathcal{C}$ par convexité, donc $G \in \mathcal{C}$.

* <u>Hérédité</u> $(n \geq 2)$

(HR) [On suppose que $\mathcal{C}$ contient tous les barycentres de n pts de $\mathcal{C}$ à poids ≥ 0.

$A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{C}$

$m_1, \dots, m_{n+1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} m_i \neq 0.$

$G = \mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n), (A_{n+1}, m_{n+1})\}$

Si $m_{n+1} = 0$: $\quad G = \mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)\} \in \mathcal{C}$ $\qquad$ (HR)

On suppose $m_{n+1} \neq 0$. Soit $H = \mathrm{Bar}\{(A_n, m_n), (A_{n+1}, m_{n+1})\}$, bien défini car $m_n + m_{n+1} \geq m_{n+1} > 0$. Par associativité,

$G = \mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), \dots, (A_{n-1}, m_{n-1}), (H, m_n + m_{n+1})\}$

On sait que $H \in \mathcal{C}$ (cas $n=2$), donc $G \in \mathcal{C}$ par (HR).

$\boxed{\text{CS}}$ On suppose $\mathcal{C}$ stable par barycentration à poids ≥ 0.

$A, B \in \mathcal{C}$ $\quad [AB] = \{M \mid M \text{ barycentre de } \{(A, m_A), (B, m_B)\},\ m_A, m_B \geq 0\}$

$\subset \mathcal{C}$ par hypothèse. $\square$

Proposition – L'intersection d'une famille de parties convexes est convexe.

Dém $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ $\quad \mathcal{C}_i \subset \mathcal{E}$ convexe

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$$

$A, B \in \mathcal{C}$

Pour tout $i \in I$, $A, B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_i$, donc $[AB] \subset \mathcal{C}_i$.

Ainsi, $[AB] \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = \mathcal{C}$. $\square$

Déf. $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{E}$

L'enveloppe convexe des points $A_1, \dots, A_N$ est l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ contenant $A_1, \dots, A_N$. Notation : $\mathrm{Conv}(A_1, \dots, A_N)$.

Autrement dit : $\mathrm{Conv}(A_1, \dots, A_N)$ est la plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ contenant $A_1, \dots, A_N$.

Ex. $\mathrm{Conv}(A_1, A_2) = [A_1 A_2]$.

Caractérisation : $\mathrm{Conv}(A_1, \dots, A_N)$ est l'ensemble des barycentres de $A_1, \dots, A_N$ à poids positifs.

Soit

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), \dots, (A_N, m_N)\} \; ; \; m_1, \dots, m_N \geq 0 \text{ et } m_1 + \dots + m_N \neq 0 \right\}.$$

Objectif : $\mathrm{Conv}(A_1, \dots, A_N) = \mathcal{C}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{E}$ une partie convexe contenant $A_1, \dots, A_N$.
$\mathcal{C}_i$ est stable par barycentration à poids positifs, donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_i$.
Par suite,

$$\mathcal{C} \subset \bigcap_{\substack{\mathcal{C}_i \text{ convexe} \\ A_1, \dots, A_N \in \mathcal{C}_i}} \mathcal{C}_i = \mathrm{Conv}(A_1, \dots, A_N).$$

$\boxed{\subset}$ Il suffit de démontrer que $\mathcal{C}$ est convexe. Pour cela, on va démontrer que $\mathcal{C}$ est stable par barycentration à poids positifs

Soit $G_1, \dots, G_r$ dans $\mathcal{E}$

Soit $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mu_1 + \dots + \mu_r \neq 0$.

Soit $G = \mathrm{Bar}\{(G_1, \mu_1), \dots, (G_n, \mu_n)\}$.

Par définition de φ,

$$G_i = \mathrm{Bar}\left\{(A_1, m_1^{(i)}), \dots, (A_N, m_N^{(i)})\right\}$$

avec $m_1^{(i)}, \dots, m_N^{(i)} \geq 0$ et $m_1^{(i)} + \dots + m_N^{(i)} = 1$.

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \overrightarrow{GG_j} = \vec{0} \qquad \sum_{k=1}^{N} m_k^{(i)} \overrightarrow{G_i A_k} = \vec{0} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

on introduit G

$1 \leq i \leq r$

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^{N} m_k^{(i)} \overrightarrow{G_i A_k} = \sum_{k=1}^{N} m_k^{(i)} \left(\overrightarrow{G_i G} + \overrightarrow{G A_k} \right)$$

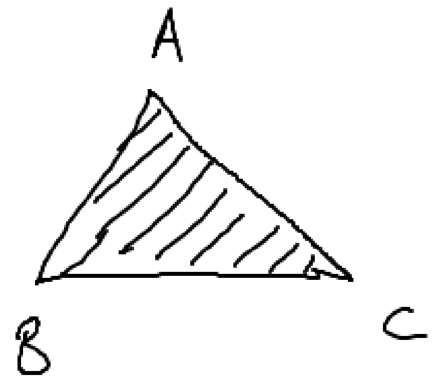
$$= \left(\sum_{k=1}^{N} m_k^{(i)} \right) \overrightarrow{G_i G} + \sum_{k=1}^{N} m_k^{(i)} \overrightarrow{G A_k} .$$

On multiplie par μ_i, puis on somme sur i :

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{r} \left[\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} m_k^{(i)} \right)}_{=1} \mu_i \overrightarrow{G_i G} + \sum_{k=1}^{N} \mu_i m_k^{(i)} \overrightarrow{G A_k} \right]$$

donc $\vec{0} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i m_k^{(i)} \right) \overrightarrow{G A_k}$ et G est barycentre de $A_1, \dots, A_N$ à poids ≥ 0. $\square$

Exemple A, B, C non alignés

$\mathrm{Conv}(A, B, C) =$  (triangle plein)

Ce sont tous les barycentres de A, B et C à poids ≥ 0.

Ex : $G = \mathrm{Bar}\{(A,1), (B,1), (C,1)\} \in \mathrm{Conv}(A,B,C)$.

$\boxed{\text{Géométrie euclidienne}}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Géométrie affine} \\ \text{Algèbre } \underline{\mathrm{IV}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{produit scalaire,} \\ \text{orthogonalité, isométries}\end{array}\right)\end{array}\right\} \text{Géométrie euclidienne}$$

$$K = \mathbb{R}$$

1. Définitions générales

1.1. Espaces affines euclidiens.

Déf – On dit qu'espace affine $\mathcal{E}$ est euclidien si on s'est donné un produit scalaire sur $\vec{\mathcal{E}}$, noté $(\vec{v}\,|\,\vec{w})$.

Exemple $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ espace affine, $\vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^n$

On prend le produit scalaire canonique : $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$(X/Y) = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

espace affine euclidien canonique de dim n.

On va en déduire plusieurs notions :

distance / orthogonalité / repère orthonormé / angles / .

isométrie / similitude

1.2. Distance

$\mathcal{E}$ espace affine euclidien

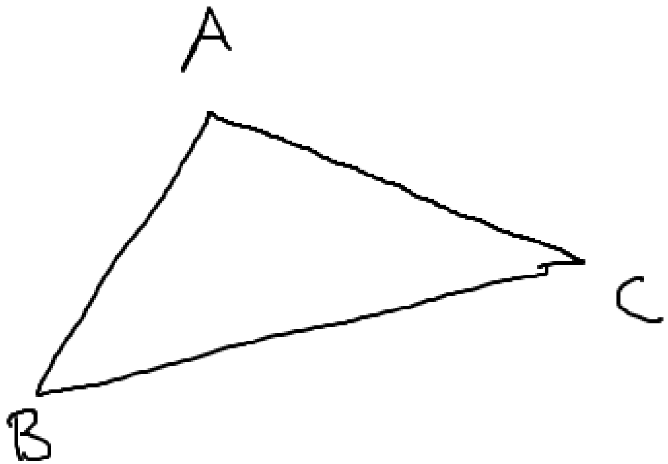
$\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ $\qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}|\vec{v})} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Def : $A, B \in \mathcal{E}$

$$d(A,B) = AB \overset{\text{def}}{=} \|\overrightarrow{AB}\| .$$

Inégalité triangulaire

$A, B, C \in \mathcal{E}$



$$\boxed{BC \leqslant AB + AC}$$

avec égalité si $A \in [BC]$.

$$BC^2 = \|\vec{BC}\|^2 = (\vec{BC}|\vec{BC}) = (\vec{BA}+\vec{AC}|\vec{BA}+\vec{AC})$$

$$= (\vec{BA}|\vec{BA}) + (\vec{AC}|\vec{AC}) + 2(\vec{AC}|\vec{BA})$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2(\vec{AC}|\vec{AB})$$

$|(\vec{AB}|\vec{AC})| \leqslant \|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|$, avec égalité si $\vec{AB}, \vec{AC}$ colinéaires. [Cauchy-Schwarz]

On a donc $BC^2 \leqslant AB^2 + AC^2 + 2.AB.AC = (AB+AC)^2$.

Rq. La démonstration fournit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \iff (\vec{AB} | \vec{AC}) = 0$$

[Pythagore].

En général, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(\vec{AB} | \vec{AC})$

est la relation d'Al-Kashi.

Conséquence de l'inégalité triangulaire : caractérisation métrique du milieu d'un segment.

I milieu de $[AB] \iff IA = IB = \frac{1}{2} AB$.

Preuve

* Soit I le milieu de $[AB]$ $\qquad \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$$AI = \|\vec{AI}\| = \left\|\frac{1}{2}\vec{AB}\right\| = \frac{1}{2}AB \quad \text{et} \quad \vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BA}, \text{ donc } IB = \frac{1}{2}AB$$

d'où
$$IA = IB = \frac{1}{2}AB.$$

* Réciproquement, soit $M \in \Sigma$ tel que $MA = MB = \frac{1}{2}AB$.

$$AB = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB = MA + MB$$ donc on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Par conséquent, $M \in (AB)$.

On écrit $\vec{AM} = \lambda\vec{AB}$, soit encore $\vec{BM} = (1-\lambda)\vec{BA}$.

On en déduit : $AM = |\lambda| \cdot AB$ et $BM = |1-\lambda| \cdot AB$, d'où $\begin{cases} |\lambda| = 1/2 \\ |1-\lambda| = 1/2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 1/2}$

Cl : M est le milieu de $[AB]$.