GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

L3, Mathématiques pour l'enseignement

Université Claude-Bernard Lyon 1

Introduction

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

FIGURE – EUCLIDE (détail de l'*École d'Athènes*, de Raphaël)

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

Dans ses *Éléments de géométrie* (en 13 volumes), Euclide regroupe et organise les connaissances mathématiques de son temps.

Sa présentation de la géométrie est fondée sur une liste restreinte de *définitions* et de *postulats* (ou *axiomes*) à partir desquels toutes les *propositions* sont démontrées selon les règles de la logique classique.

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

Définitions

Postulats

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

Définitions

1. Un **point** est ce qui n'a aucune partie.
2. Une **ligne** est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne **droite** est celle qui est également placée entre ses points.

   [...]

35. Les **parallèles** sont des droites qui, étant placées sur un même plan, et qui étant prolongées de part et d'autre à l'infini, ne se rencontrent nulle part.

Postulats

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

Définitions

Postulats

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

Définitions

Postulats

1. On peut tracer une (unique) droite entre deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une (unique) ligne droite.
3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents (égaux).

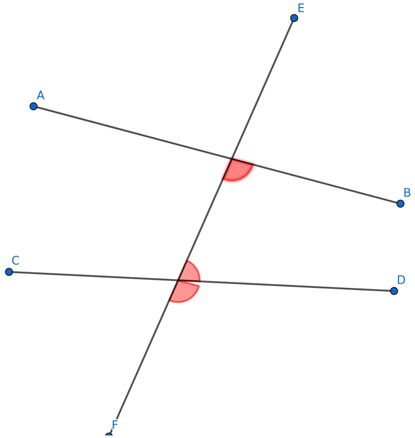
Définitions

Postulats

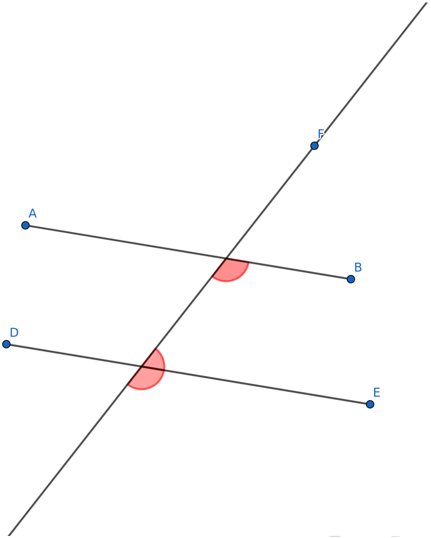
1. On peut tracer une (unique) droite entre deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une (unique) ligne droite.
3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents (égaux).

Postulats

5. Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.


E
A
B
C
D
F

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)



EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

La géométrie d'Euclide est au cœur des mathématiques pendant de nombreux siècles. Elle s'avère remarquablement efficace pour appréhender le monde réel (astronomie, mécanique, architecture, etc).

EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

La géométrie d'Euclide est au cœur des mathématiques pendant de nombreux siècles. Elle s'avère remarquablement efficace pour appréhender le monde réel (astronomie, mécanique, architecture, etc).

Il demeure toutefois des questions et des problèmes :

- la notion de *congruence* n'est pas claire ;
- certaines démonstrations utilisent (implicitement) plus que les axiomes formulés ;
- surtout, le statut du cinquième postulat intrigue ; n'est-il pas une *conséquence* des précédents ?

René DESCARTES (1596-1650)

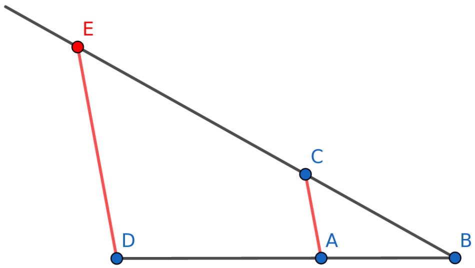
Dans *La Géométrie*, publié en 1623, DESCARTES initie le rapprochement entre la géométrie et l'algèbre en expliquant :

- comment résoudre géométriquement certaines équations polynomiales ;
- comment démontrer algébriquement certains théorèmes géométriques (via un repère et des coordonnées *cartésiennes*).

Par exemple, au début de son traité, Descartes explique comment effectuer *géométriquement* les opérations élémentaires entre les nombres : addition, multiplication, inversion, extraction d'une racine carrée.

En particulier, il explique comment multiplier deux nombres grâce au théorème de Thalès.

René DESCARTES



AB=1
BC = c
BD = d

$c \times d = BE$

Nicolaï LOBATCHEVSKI (1792-1856), János BOLYAI (1802-1860)

FIGURE – LOBATCHEVSKI

FIGURE – BOLYAI

Nicolaï LOBATCHEVSKI (1792-1856), János BOLYAI (1802-1860)

Indépendamment l'un de l'autre, LOBATCHEVSKI (en 1829) et BOLYAI (en 1832) démontrent qu'il existe des géométries satisfaisant à tous les postulats d'Euclide, sauf le cinquième. Ceci prouve en particulier que ce dernier postulat n'est pas une conséquence des précédents.

Dans les géométries qu'ils décrivent, on peut tracer *une infinité* de droites parallèles à une droite donnée passant par un point extérieur donné.

C'est l'apparition des géométries **non euclidiennes**.

Félix KLEIN (1849-1925)

Dans son *Programme d'Erlangen* (1872), Felix KLEIN explique que les propriétés d'une géométrie donnée sont la traduction de l'action du **groupe des transformations** de cette géométrie.

Géométrie affine ↔ Groupe affine

Géométrie euclidienne ↔ Groupe euclidien (isométries)

[...]

Géométrie et calcul vectoriel

Fruit des travaux de nombreux mathématiciens et physiciens au cours du XIXe siècle (dont HAMILTON, GRASSMANN, MAXWELL, GIBBS), la notion d'**espace vectoriel** se dégage à la fin du XIXe siècle. Elle fournit un cadre conceptuel simple permettant d'exprimer la géométrie euclidienne grâce aux techniques puissantes de l'algèbre linéaire.

Géométrie et calcul vectoriel

Fruit des travaux de nombreux mathématiciens et physiciens au cours du XIXe siècle (dont Hamilton, Grassmann, Maxwell, Gibbs), la notion d'**espace vectoriel** se dégage à la fin du XIXe siècle. Elle fournit un cadre conceptuel simple permettant d'exprimer la géométrie euclidienne grâce aux techniques puissantes de l'algèbre linéaire.

Aux alentours de 1960, la réforme dite des « Maths modernes » a remplacé l'enseignement traditionnel de la géométrie à l'école par celui de l'algèbre linéaire dans la plupart des pays occidentaux. En France, ceci fut abandonné en 1983.

David HILBERT (1862-1943)

Dans ses *Grundlagen der Geometrie* (1899), David HILBERT propose une refonte totalement rigoureuse de la géométrie euclidienne reposant sur 20 axiomes organisés en 3 familles (incidence, ordre, congruence).

Décrivons brièvement le cas de la géométrie euclidienne *plane*.

David HILBERT (1862-1943)

On commence en se donnant deux ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$. Les éléments de $\mathscr{P}$ sont appelés **points**, ceux de $\mathscr{D}$ sont appelés **droites**. On précise également une relation d'**appartenance** entre les points et les droites : on note $p \in D$ pour dire que le point p appartient à la droite D.

On introduit ensuite 20 axiomes. Voici les trois premiers :

Axiome 1 Pour tous points p, q distincts, il existe une unique droite D telle que $p \in D$ et $q \in D$.

Axiome 2 Toute droite contient au moins deux points distincts.

Axiome 3 Il existe trois points non alignés.

On dit que deux droites D, D' sont **parallèles** s'il n'existe aucun point appartenant simultanément à D et D'.

xiome (P) Par un point p n'appartenant pas à une droite D passe une unique droite parallèle à D.

Il resterait à énoncer 16 autres axiomes...

Si ces 20 axiomes sont vrais, on dit que $\mathscr{P}$ est un *plan euclidien*.

Exemple : si $\mathscr{P} = \mathbf{R}^2$, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des droites usuelles de $\mathbf{R}^2$, $\in$ est l'appartenance habituelle

alors *tous* les axiomes de Hilbert sont *vrais*.

Exercice : vérifier que les trois premiers axiomes sont vrais, ainsi que l'axiome (P).

Exemple : si $\mathscr{P} = \mathbf{R}^2$, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des droites usuelles de $\mathbf{R}^2$, $\in$ est l'appartenance habituelle et la distance entre deux points $a = (x, y)$, $b = (x', y')$ est définie par

$$ab = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

alors *tous* les axiomes de Hilbert sont *vrais*.

Exercice : vérifier que les trois premiers axiomes sont vrais, ainsi que l'axiome (P).

David HILBERT (1862-1943)

Réciproquement, considérons un *plan euclidien* $\mathscr{P}$ (avec $\mathscr{D}$ et $\in$) abstrait. Choisissons trois points non alignés o, i, j dans $\mathscr{P}$.

On peut démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME

Il existe une (et une seule) bijection

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathscr{P}$$

qui respecte l'alignement :

les points a, b, c sont alignés dans $\mathbf{R}^2$ si et seulement si les points $f(a), f(b)$ et $f(c)$ sont alignés dans $\mathscr{P}$

et telle que

$$f(0,0) = o,\ f(1,0) = i,\ f(0,1) = j.$$

- Les axiomes de Hilbert font **apparaître** les nombres réels et les coordonnées !
- Si les axiomes de Hilbert conduisent à une contradiction, alors il existe une contradiction dans la théorie des nombres réels.
- Avec seulement 6 axiomes (les trois premiers, l'axiome (P), et les axiomes de Desargues et de Pappus), on obtient tous les plans K^2, où K est un *corps commutatif*.
  Les autres axiomes de Hilbert forcent $K = \mathbf{R}$.

David HILBERT (1862-1943)

Exercice. Prendre un *Dobble* et chercher la figure n'apparaissant que 6 fois sur les 55 cartes. C'est souvent (toujours ?)

Retirer les 6 cartes contenant cette figure.

Désignons par $\mathscr{P}$ l'ensemble des 49 cartes restantes et par $\mathscr{D}$ l'ensemble des 56 figures restantes. Convenons de dire qu'une carte p «*appartient*» à une figure D si D apparaît sur p. [1]

1. Si cette formulation donne mal à la tête, se plaindre à *Asmodée*, le fabriquant du jeu !

David HILBERT (1862-1943)

Vérifier que les axiomes 1, 2, 3 et (P) de Hilbert sont *vrais* dans cette situation. Autrement dit :

1. Par deux points distincts passe une et une seule droite.
   - ◇ Deux cartes distinctes ont une unique figure en commun.
2. Chaque droite contient au moins deux points.
   - ◇ Chaque figure apparaît au moins sur deux cartes.
3. Il existe trois points non alignés.
   - ◇ Il existe trois cartes n'ayant aucune figure en commun.

Caché dans le Dooble se trouve le corps...

$$\mathbf{F}_7 = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}.$$