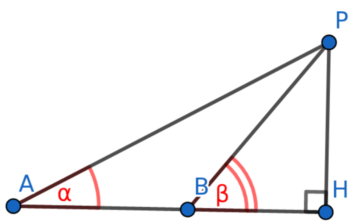
FEUILLES D'EXERCICES 9 : GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE (2)

Exercice 1 — On souhaite mesurer la hauteur d'un point P inaccessible par deux angles. Par visée, l'observateur mesure l'angle α, puis l'angle β après s'être éloigné de la distance horizontale AB. Quelle est la hauteur PH du point P ?



Exercice 2 — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soit ABC un triangle non plat contenu dans un plan $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$, et soit M un point de $\mathscr{E}$ se projetant orthogonalement sur $\mathscr{P}$ en un point H intérieur à ABC. On suppose en outre que tous les angles du triangle ABC sont aigus ou droits.

1. Démontrer l'inégalité $\widehat{HAB} \leqslant \widehat{MAB}$, avec égalité si et seulement si $M = H$.
2. En déduire l'inégalité
$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMA} \leqslant 2\pi,$$
avec égalité si et seulement si M est dans le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 3 [Aire euclidienne] — Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien.

L'*aire géométrique* d'un triangle ABC est par définition le nombre réel positif
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$$
où $\mathscr{B}$ désigne une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Si, de plus, le plan $\mathscr{E}$ est *orienté*, l'*aire algébrique* du triangle ABC est par définition
$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}),$$
où $\mathscr{B}$ désigne maintenant une base orthonormée *directe* de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

1. Justifier que l'aire géométrique (resp. algébrique) ne dépend pas du choix de la base orthonormée (resp. orthonormée directe) $\mathscr{B}$.
2. Si A' désigne le projeté orthogonal de A sur (BC), démontrer l'identité
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AA' \cdot BC.$$
3. Orientons le plan $\mathscr{E}$. Si le triangle ABC est non plat, démontrer que les coefficients barycentriques (α, β, γ) d'un point M de $\mathscr{E}$ dans le repère affine (A, B, C) sont
$$\alpha = \frac{\mathscr{A}(MBC)}{\mathscr{A}(ABC)}, \quad \beta = \frac{\mathscr{A}(AMC)}{\mathscr{A}(ABC)} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\mathscr{A}(ABM)}{\mathscr{A}(ABC)}.$$

Exercice 4 [Volume euclidien] — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 *orienté*.

Étant donné quatre points A, B, C et D, on définit le *volume algébrique* $\mathscr{V}(\mathrm{ABCD})$ du tétraèdre orienté ABCD par la formule

$$\mathscr{V}(\mathrm{ABCD}) = \frac{1}{6}\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}).$$

Son *volume géométrique* $\mathrm{V}_{\mathrm{ABCD}}$ est la valeur absolue du volume algébrique.

1. Vérifier que le parallélépipède construit sur la base $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$ est la réunion de six tétraèdres de même volume que ABCD et dont les intérieurs sont mutuellement disjoints.
2. Soit D' le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Démontrer l'identité
$$\mathrm{V}_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{3}\mathrm{DD}' \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{ABC}}.$$
3. Soit Π une pyramide régulière de côté 1 et soit T un tétraèdre régulier de côté 1. Déterminer une formule explicite pour V_Π et V_T puis vérifier la relation : $\mathrm{V}_\Pi = 2\mathrm{V}_\mathrm{T}$.

Exercice 5 — Soit ABC un triangle non aplati dans un plan affine euclidien. On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$.

On a déjà vu que le *centre du cercle inscrit* I est le barycentre de A, B et C affectés des poids respectifs a, b et c (Feuille 8, exercice 3).

1. Soit H l'orthocentre et soit (α, β, γ) ses coordonnées barycentriques relativement au repère affine (A, B, C).
   (i) Démontrer l'identité $-\beta c\cos(\mathrm{B}) + \gamma b\cos(\mathrm{C}) = 0$. (*Indication : considérer la projection orthogonale sur* (BC).)
   (ii) Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés des poids respectifs $a\cos(\mathrm{B})\cos(\mathrm{C})$, $b\cos(\mathrm{A})\cos(\mathrm{C})$ et $c\cos(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B})$.
2. Démontrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est le barycentre des points A, B et C affectés des poids respectifs $\sin(2\mathrm{A})$, $\sin(2\mathrm{B})$ et $\sin(2\mathrm{C})$.

   Indication : utiliser l'exercice 3 et le théorème de l'angle inscrit.
3. Discuter la position des points G, H, I et O par rapport au triangle ABC.