L3 Mathématiques pour l'enseignement, 2020-21 Géométrie élémentaire
Université Lyon 1

FEUILLES D'EXERCICES 8 : GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE (1)

Exercice 1 [Somme des angles d'un polygone convexe] — 1. Par découpage en triangles, démontrer que la somme des angles géométriques d'un quadrilatère convexe est égale à 2π.

2. Plus généralement, établir que la somme des angles géométriques d'un polygone convexe à $n \geqslant 3$ côtés est égale à $(n-2)\pi$.

Exercice 2 [Bissectrices] — Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, O un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires non colinéaires dans $\vec{\mathscr{E}}$. Posons

$$\mathscr{D} = O + \mathbf{R}\vec{u} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}' = O + \mathbf{R}\vec{v}.$$

On désigne par $\mathscr{B}_i$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} + \vec{v}$ (*bissectrice intérieure*), par $\mathscr{B}_e$ la droite passant par O dirigée par $\vec{u} - \vec{v}$ (*bissectrice extérieure*).

Démontrer les assertions suivantes :

1. Les droites $\mathscr{B}_i$ et $\mathscr{B}_e$ sont perpendiculaires.
2. Les réflexions d'axe $\mathscr{B}_i$ et $\mathscr{B}_e$ échangent les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
3. La réflexion d'axe $\mathscr{B}_i$ échange les demi-droites $O + \mathbf{R}_+\vec{u}$ et $O + \mathbf{R}_+\vec{v}$.
4. $\mathscr{B}_i \cup \mathscr{B}_e$ est l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ équidistants de D et D′.

Exercice 3 [Bissectrices d'un triangle] — Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine euclidien.

1. Soit P le point d'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et du segment $[BC]$. Démontrer l'égalité
$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = -\frac{AB}{AC}.$$
Indication : considérer les deux points B', B'' de (AC) tels que $AB' = AB'' = AB$. Si B'' est le point extérieur à $[AC]$, commencer par établir que les droites (AP) et (BB'') sont parallèles.
2. Posons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Soit I le barycentre des points pondérés $(A,a), (B,b)$ et (C,c).
   (i) En utilisant la question précédente, démontrer que I est la point de concours des trois bissectrices intérieures du triangle ABC.
   (ii) Démontrer que le cercle de centre I et de rayon $r = d(I,(BC))$ est tangent aux trois côtés du triangle ABC ; c'est le *cercle inscrit* de ce triangle.

Exercice 4 [Cas d'isométries des triangles] — 1. Énoncer les trois cas d'isométrie des triangles.

2. Soit ABC un triangle. On note B' le projeté orthogonal de B sur (AC) et C' celui de C sur (AB). Démontrer que, si $BB' = CC'$, alors ABC est isocèle en A.
Indication : montrer que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.
3. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit, à l'extérieur de $ABCD$, les triangles équilatéraux ADP et ABQ. Démontrer que le triangle PQC est équilatéral.
Démontrer que les triangles BCQ, DCP et APQ sont isométriques.