Feuille 4

Exercice 5 — 1) V est un espace vectoriel réel de dimension finie, $s \in \mathrm{End}(V)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $V = W \oplus W'$ et $s(w+w') = w - w'$ pour tous $w \in W, w' \in W'$.
Choisissons une base $(e_1, \dots, e_m)$ de W et une base $(e'_1, \dots, e'_\ell)$ de W'. La famille $(e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_\ell)$ est une base de V et $s(e_i) = e_i$, $s(e'_j) = -e'_j$. La matrice de s dans cette base est

$$\left(\begin{array}{c|c} I_m & (0) \\ \hline (0) & -I_\ell \end{array}\right).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que la matrice de s dans une certaine base de V soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \varepsilon_i \in \{-1, 1\}.$$

La matrice de $s \circ s$ dans cette base est $M^2 = I_n$, donc $s \circ s = id_V$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que l'on ait $s \circ s = id_V$. Le polynôme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule s et est scindé à racines simples, donc s est diagonalisable, à valeurs propres $-1, 1$. On peut donc écrire

$$V = W \oplus W' \qquad \text{avec} \quad W = \mathrm{Ker}(s - id_V) \text{ et } W' = \mathrm{Ker}(s + id_V),$$

donc $s(w + w') = s(w) + s(w') = w - w'$ pour tous vecteurs $w \in W$, $w' \in W'$.

2) $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension finie et s est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que $s \circ s = id_{\mathcal{E}}$.

Considérons un point A de $\mathcal{E}$ et soit I le milieu du segment $[A\, s(A)]$. L'application s étant affine, elle transforme le point I en le milieu du segment $[s(A)\, s(s(A))]$. Comme $s \circ s = id_{\mathcal{E}}$, on a $s(s(A)) = A$ et donc $[s(A)\, s(s(A))] = [A\, s(A)]$. Par unicité du milieu d'un segment, on en déduit $s(I) = I$.

L'application s possède donc un point fixe.

3) (i) $\Rightarrow$ (ii) Si s est une symétrie affine, alors $s(s(M)) = M$ pour tout point M de $\mathcal{E}$ et donc

$s \circ s = id_{\mathcal{E}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $s \circ s = id_{\mathcal{E}}$. On sait depuis la question précédente que s possède (au moins) un point fixe, noté O.

La partie linéaire de s vérifie $\vec{s} \circ \vec{s} = \overrightarrow{s \circ s} = \overrightarrow{id_{\mathcal{E}}} = id_{\vec{\mathcal{E}}}$, donc il s'agit d'une symétrie vectorielle d'après la question 1 : $\vec{\mathcal{E}} = \mathrm{Ker}(\vec{s} - id_{\vec{\mathcal{E}}}) \oplus \mathrm{Ker}(s + id_{\vec{\mathcal{E}}})$.

Le sous-espace des points fixes de s est $\mathcal{F} = O + \mathrm{Ker}(\vec{s} - id_{\vec{\mathcal{E}}})$ (cf. exercice 1) et

$$s(M) = s(O + \overrightarrow{OM}) = s(O) + \vec{s}(\overrightarrow{OM}) = O + (\vec{w} - \vec{w}')$$

où $\vec{w}$ est la composante de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathrm{Ker}(\vec{s} - id_{\vec{\mathcal{E}}})$ et $\vec{w}'$ sa composante dans $\mathrm{Ker}(\vec{s} + id_{\vec{\mathcal{E}}})$.

Ainsi, s est la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(\vec{s} + id_{\vec{\mathcal{E}}})$.

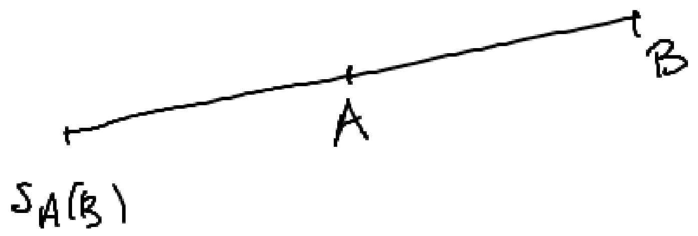
Exercice 6

1) La partie linéaire de $s_A \circ s_B$ est $\overrightarrow{s_A \circ s_B} = \vec{s_A} \circ \vec{s_B} = (-id_{\vec{\mathcal{E}}}) \circ (-id_{\vec{\mathcal{E}}}) = id_{\vec{\mathcal{E}}}$

donc $s_A \circ s_B$ est une translation.

Comme $(s_A \circ s_B)(B) = s_A(B)$ est le symétrique de B par rapport à A,

il s'agit de la translation de vecteur $\overrightarrow{B s_A(B)} = 2\overrightarrow{BA}$.



l)

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$,

$$\overrightarrow{s_c \circ t_{\vec{v}} \circ s_c} = \vec{s_c} \circ \overrightarrow{t_v} \circ \vec{s_c}$$
$$= (-id_{\vec{\mathcal{E}}}) \circ id_{\vec{\mathcal{E}}} \circ (-id_{\vec{\mathcal{E}}})$$
$$= id_{\vec{\mathcal{E}}}$$
$$= \overrightarrow{t_{\vec{v}}}.$$

Par ailleurs, $s_c \circ t_{\vec{v}} \circ s_c(c) = s_c \circ t_{\vec{v}}(c) = s_c(c+\vec{v}) = s_c(c) - \vec{v} = c - \vec{v}$
$= t_{-\vec{v}}(c).$

Les deux applications affines $s_C \circ t_{\vec{v}} \circ s_C$ et $t_{-\vec{v}}$ ont la même partie linéaire et elles coïncident sur le point C, donc elles sont égales :

$$s_C \circ t_{\vec{v}} \circ s_C = t_{-\vec{v}}.$$

Rq. Remarquons que l'on a $s_C^{-1} = s_C$. Plus généralement, pour toute bijection affine f de $\mathcal{E}$ et tout vecteur $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$, $\quad f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1} = t_{\vec{f}(\vec{v})}$

(Principe de conjugaison).

3) $s_C \circ s_A \circ s_B \circ s_C = s_C \circ t_{2\overrightarrow{BA}} \circ s_C$

$$= t_{-2\overrightarrow{BA}} = t_{2\overrightarrow{AB}} = s_B \circ s_A$$

donc, en composant à gauche par $s_C = s_C^{-1}$, nous obtenons $s_A \circ s_B \circ s_C = s_C \circ s_B \circ s_A$.

4) Posons $s = s_A \circ s_B \circ s_C$. Comme $s \circ s = (s_A \circ s_B \circ s_C) \circ (s_C \circ s_B \circ s_A) = s_A \circ s_B \circ s_C^2 \circ s_B \circ s_A = s_A \circ s_B^2 \circ s_A = s_A^2 = id_{\mathcal{E}}$, s est une symétrie affine en vertu de la caractérisation établie à la question précédente.

La partie linéaire de s est

$$\vec{s} = \overrightarrow{s_A} \circ \overrightarrow{s_B} \circ \overrightarrow{s_C} = (-id_{\vec{\mathcal{E}}}) \circ (-id_{\vec{\mathcal{E}}}) \circ (-id_{\vec{\mathcal{E}}}) = -id_{\vec{\mathcal{E}}}$$

donc s est la symétrie relativement à un point de $\mathcal{E}$.

Soit D le centre de la symétrie s.

Comme $s_D = s_A \circ s_B \circ s_C$, nous obtenons $s_D \circ s_C = s_A \circ s_B$ puis $t_{2\overrightarrow{CD}} = t_{2\overrightarrow{BA}}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Le point D est donc le quatrième sommet du parallélogramme défini par A, B et C.

Exercice 7 –

1) Notons M la matrice 2×2 dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ dans la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$, M' la matrice 2×2 dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ et $\overrightarrow{f(C)f(D)}$ dans cette même base, et enfin F la matrice de l'application linéaire $\vec{f}$ dans cette base. Comme $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\vec{AB})$ et $\overrightarrow{f(C)f(D)} = \vec{f}(\vec{CD})$, nous avons

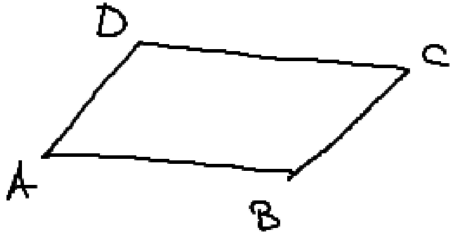
$$M' = F.M.$$

En prenant les déterminants, nous en déduisons

$$\mathcal{A}(f(A)f(B)f(C)) = \det(M') = \det(F)\det(M) = \det(\vec{f})\,\mathcal{A}(ABC).$$

En particulier, les applications affines dont la partie linéaire est de déterminant 1 (resp. ± 1) préservent les aires algébriques (resp. les aires géométriques).

2) Considérons un parallélogramme ABCD

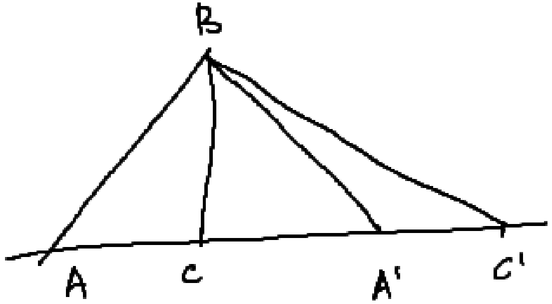


Soit s la symétrie par rapport à (BD) parallèlement à (AC). On a $s(A)=C$, $s(C)=A$ et $s(B)=B$, $s(D)=D$. Comme $\vec{s} = -id_{\vec{E}}$ $\det(\vec{s}) = (-1)^2 = 1$.

Nous en déduisons :

$$\mathcal{A}(BCD) = \mathcal{A}(s(B)s(A)s(D)) = \det(\vec{s})\,\mathcal{A}(BAD) = \mathcal{A}(BAD) = \mathcal{A}(ADB).$$

3)



Soit f l'application affine telle que

$f(B)=B$, $f(A)=A'$ et $f(C)=C'$.

Écrivons la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$:

$$\vec{f}(\vec{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{A'B} = \vec{A'A} + \vec{AB} = \vec{AB} + \lambda\vec{AC} \quad , \text{ en posant } \vec{AA'} = -\lambda\vec{AC}$$

$$\vec{f}(\vec{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \vec{A'C'} = \mu\vec{AC} .$$

On a donc $\quad \det(\vec{f}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \mu = \dfrac{\vec{A'C'}}{\vec{AC}}$.

Nous en déduisons le lemme des proportions :

$$\mathcal{A}(A'BC') = \mathcal{A}(f(A)f(B)f(C)) = \det(\vec{f})\,\mathcal{A}(ABC) = \frac{\vec{A'C'}}{\vec{AC}}\,\mathcal{A}(ABC)$$

et donc $\quad \dfrac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{\vec{A'C'}}{\vec{AC}}$.