Feuilles d'exercices 10 : géométrie euclidienne (3)

Exercice 1 — Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine euclidien. On se propose de démontrer que le symétrique H' de H par rapport à un côté du triangle se trouve sur le cercle circonscrit. Dans le raisonnement ci-dessous, nous considérons le côté $[BC]$.

1. Notons B' (resp. C') le pied de la hauteur issue de B (resp. de C). Démontrer que les points A, H, B' et C' sont cocycliques.
2. En déduire que les points A, B, C et H' sont cocycliques.

Exercice 2 — 1. Considérons deux droites $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ dans un plan affine euclidien et soit $\vec{u}, \vec{u'}$ des vecteurs directeurs unitaires de celles-ci.

(i) Vérifier que l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$ ne dépend du choix de $\vec{u}$ et de $\vec{u'}$ qu'à un multiple de l'angle plat près. C'est par définition *l'angle orienté* des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, noté $(\widehat{\mathscr{D}, \mathscr{D}'})$.

(ii) Comment caractériser avec cet angle le parallélisme (resp. la perpendicularité) de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$?

2. Soit $\mathscr{D}$ une droite dans un plan affine euclidien et O un point du plan. Considérons une rotation r de centre O et posons $\mathscr{D}' = r(\mathscr{D})$. Quel est le lien entre $(\widehat{\mathscr{D}, \mathscr{D}'})$ et l'angle de r ?
3. (*Extrait d'une épreuve écrite du Capes*) Considérons trois points du plan A, A', M, distincts et non alignés.

   (i) Déterminer le centre et l'angle de chacune des deux rotations r telles que $r(A) = A'$ et $r((AM)) = (A'M)$.

   (ii) Expliquer comment construire ces centres.

   Indication : on pourra utiliser la version limite du théorème de l'angle au centre, faisant intervenir une tangente au cercle.

Exercice 3 — Considérons trois points non alignés A, B, C dans un plan affine euclidien.

1. Démontrer l'existence et l'unicité du cercle $\mathscr{C}$ passant par A, B et C.
2. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ est l'arc $\mathscr{C}_1$ du cercle $\mathscr{C}$ d'extrémités A et B contenant C.
3. Comment caractériser les points appartenant à l'autre arc de $\mathscr{C}$ d'extremités A et B ?
4. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (angles géométriques) est la réunion de l'arc $\mathscr{C}_1$ et de son symétrique par rapport à la droite (AB).
5. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = \pi - \widehat{ACB}$?