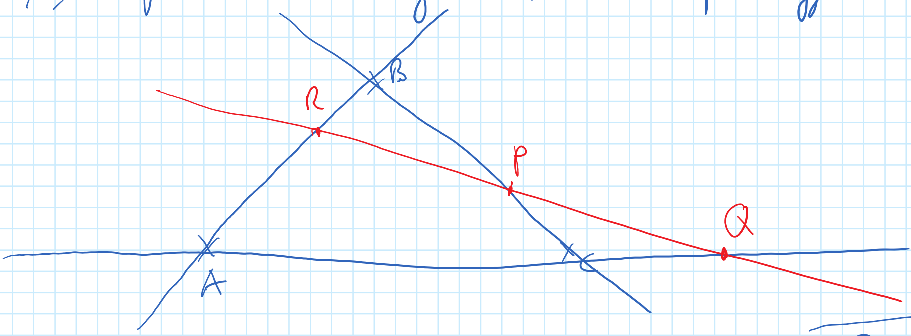
jeudi 25 mars 2021 12:17

Exercice 5 feuille 5 :

A, B, C points non alignés dans un plan affine réel



P barycentre de (B,β) et (C,γ).
Q ——— (A,α') et (C,γ')
R ——— (A,α'') et (B,β'')

Ω a pour coordonnées barycentriques (a,b,c) dans le repère (A,B,C) ssi $a\vec{\Omega A} + b\vec{\Omega B} + c\vec{\Omega C} = \vec{0}$ et $a+b+c=1$

1) Mq. P, Q, R alignés ssi $\alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' = 0$.

Dans le repère (A,B,C), le point P a pour coordonnées barycentriques $\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)$

Q ——— $\left(\frac{\alpha'}{\alpha'+\gamma'}, 0, \frac{\gamma'}{\alpha'+\gamma'}\right)$.

R ——— $\left(\frac{\alpha''}{\alpha''+\beta''}, \frac{\beta''}{\alpha''+\beta''}, 0\right)$.

D'après l'exo 4 1), P, Q, R sont alignés ssi

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta}{\beta+\gamma} & \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \\ \frac{\alpha'}{\alpha'+\gamma'} & 0 & \frac{\gamma'}{\alpha'+\gamma'} \\ \frac{\alpha''}{\alpha''+\beta''} & \frac{\beta''}{\alpha''+\beta''} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ssi $\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha' & 0 & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & 0 \end{vmatrix} = 0$

ssi $-\alpha' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'' & 0 \end{vmatrix} + \alpha'' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & \gamma' \end{vmatrix} = 0$

ssi $\alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' = 0$

2) Mq. (AP), (BQ), (CR) concourantes ou parallèles ssi
$\alpha'\beta''\gamma - \alpha''\beta\gamma' = 0$.

La droite (AP) a pour équation $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{\beta}{\beta+\gamma} & \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

car $M(a,b,c) \in (AP)$ ssi Ω, A, P alignés i.e. $\begin{vmatrix} b & c \\ \frac{\beta}{\beta+\gamma} & \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \end{vmatrix} = 0$ i.e. $\begin{vmatrix} b & c \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$ i.e. $\underline{\gamma b - \beta c = 0}$

De même, l'équation de (BQ) est $-\gamma' a + \alpha' c = 0$

et celle de (CR) est $\beta'' a - \alpha'' b = 0$

D'après 3) de l'exo 4, (AP), (BQ) et (CR) sont parallèles ou concourantes

ssi $\begin{vmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma' & 0 & \alpha' \\ \beta'' & -\alpha'' & 0 \end{vmatrix} = 0$

ssi $-\gamma \begin{vmatrix} -\gamma' & \alpha' \\ \beta'' & 0 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \gamma' & 0 \\ \beta'' & -\alpha'' \end{vmatrix} = 0$

ssi $\gamma \alpha' \beta'' - \beta \gamma' \alpha'' = 0$

3) <u>Rappel</u> : Th. de Ménélaüs : P, Q, R points distincts de A, B, C tq. $P \in (BC)$, $Q \in (AC)$, $R \in (AB)$

Alors $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ ssi P, Q, R alignés.

Comme P, Q, R sont distincts de A, B, C, alors

P est le barycentre de (B, β) et (C, γ) avec β et γ non nuls.

Q ——— (A, α') et (C, γ') ——— α' et γ' ———.

R ——— (A, α'') et (B, β'') ——— α'' et β'' ———.

On a donc $\beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = 0$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{-\gamma}{\beta}$$ (division OK car β non nul)

De même, $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{-\alpha'}{\gamma'}$ et $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{-\beta''}{\alpha''}$.

D'après 1), P, Q, R alignés ssi $\alpha' \beta'' \gamma + \alpha'' \beta \gamma' = 0$.

ssi $\alpha' \beta'' \gamma = -\alpha'' \beta \gamma'$

ssi $\frac{-\alpha' \beta'' \gamma}{\alpha'' \beta \gamma'} = 1$

Or $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{-\alpha' \beta'' \gamma}{\alpha'' \beta \gamma'}$. $\square$

4) Th de Ceva : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles

ssi $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

D'après 2), (AP), (BQ), (CR) concourantes ou parallèles ssi

$\alpha' \beta'' \gamma - \alpha'' \beta \gamma' = 0$

si $\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma'$

si $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \times \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \times \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.