Feuille 2

Exercice 1 — $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension n sur un corps K.

$A_0, \dots, A_n$ sont $n+1$ points de $\mathcal{E}$.

Conditions équivalentes : (i) il n'existe pas de sous-espace affine strict de $\mathcal{E}$ contenant $A_0, \dots, A_n$

(ii) $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $\mathcal{F}$ soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant les points $A_0, \dots, A_n$. Les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ appartiennent alors au sous-espace vectoriel $\vec{\mathcal{F}}$, donc $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{E}}$ puisque $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}$ et, finalement, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Posons $\mathcal{F} = A_0 + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right)$. Il s'agit d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant A_0 ainsi que chaque $A_i = A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, donc $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ par hypothèse. On en déduit

$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right) = \vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{E}}$$

donc $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ est une famille génératrice. Comme $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$, il s'agit d'une base.