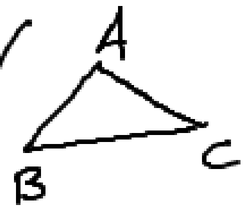
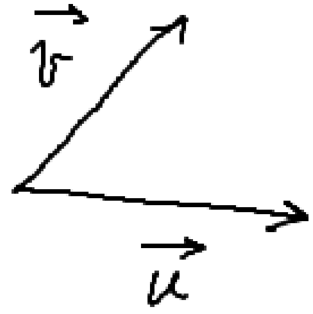
Angles

Notion multiforme : secteur angulaire (),
angle géométrique ( $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$), angles non orientés
de vecteurs (= angles géométriques), angles orientés de vecteurs
dans le plan (+ délicat).

Angles géométriques

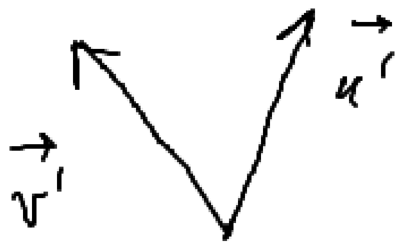
$\vec u, \vec v \in \vec{\mathcal{E}}$

$\|\vec u\| = \|\vec v\| = 1.$



$\vec{u'}, \vec{v'} \in \vec{\mathcal{E}}$

$\|\vec{u'}\| = \|\vec{v'}\| = 1$



$\exists ?$ $\vec f$ isométrie vectorielle tq $\vec f(\vec u) = \vec{u'}$ et $\vec f(\vec v) = \vec{v'}$

Réponse : il existe une isométrie vectorielle $\vec f$ tq.

$\vec f(\vec u) = \vec{u'}$ et $\vec f(\vec v) = \vec{v'}$ ssi $(\vec{u'} | \vec{v'}) = (\vec u | \vec v)$.

Dém

* En dimension 2

$\vec w = x\vec u + y\vec e$

$(\vec w|\vec u) = x\|\vec u\|^2 + y(\vec e|\vec u)$

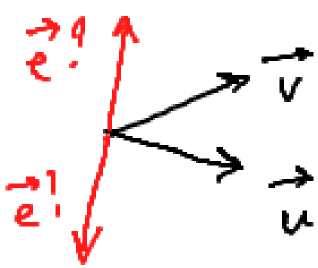
$= x$

On considère deux bases orthonormées $(\vec u, \vec e)$ et $(\vec u', \vec e')$.

[Existence via Gram-Schmidt]. On sait qu'il existe une (unique) isométrie vectorielle $\vec f$ telle que $\vec f(\vec u) = \vec u'$ et $\vec f(\vec e) = \vec e'$.

$$\vec v = (\vec v|\vec u)\vec u + (\vec v|\vec e)\vec e \qquad 1 = \|\vec v\|^2 = (\vec v|\vec u)^2 + (\vec v|\vec e)^2$$

$$\vec v' = (\vec v'|\vec u')\vec u' + (\vec v'|\vec e')\vec e' \qquad 1 = \|\vec v'\|^2 = (\vec v'|\vec u')^2 + (\vec v'|\vec e')^2.$$



On choisit $\vec e$ au début tq $(\vec v|\vec e) \geq 0$.

Idem pour $\vec e'$: on le choisit tq. $(\vec v'|\vec e') \geq 0$.

On a :

$$(\vec{v}|\vec{e}) = \sqrt{1-(\vec{v}|\vec{u})^2} \quad (\text{car } \geq 0)$$

$$(\vec{v}'|\vec{e}') = \sqrt{1-(\vec{v}'|\vec{u}')^2} \quad (-)$$

Hyp : $(\vec{v}'|\vec{u}') = (\vec{v}|\vec{u})$

Alors $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{f}\left((\vec{v}|\vec{u})\vec{u} + (\vec{v}|\vec{e})\vec{e}\right)$

$= (\vec{v}|\vec{u})\vec{f}(\vec{u}) + (\vec{v}|\vec{e})f(\vec{e})$

$= (\vec{v}|\vec{u})\vec{u}' + (\vec{v}|\vec{e})\vec{e}'$

$= (\vec{v}'|\vec{u}')\vec{u} + (\vec{v}'|\vec{e}')\vec{e}' = \vec{v}'$.

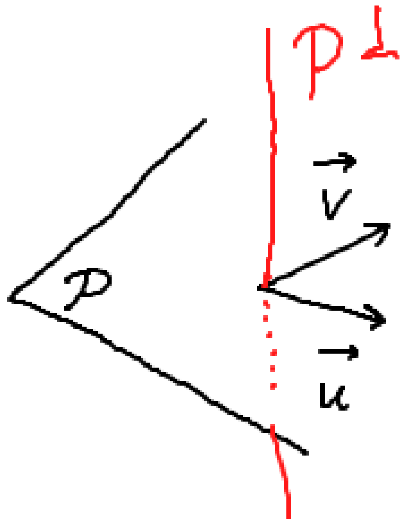
Rep Si $\vec{f}$ est une isométrie tq. $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}'$ et $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}'$,

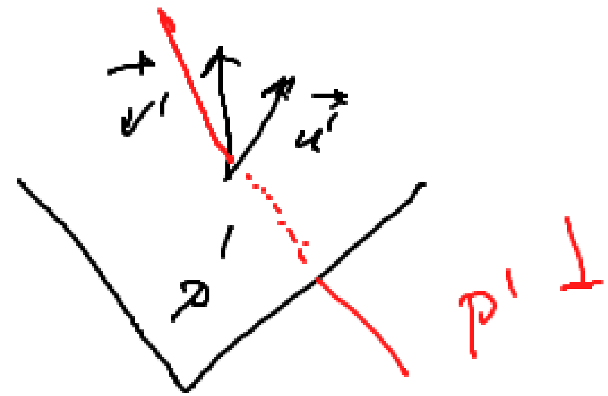
alors

$(\vec{u}'|\vec{v}') = (\vec{f}(\vec{u})|\vec{f}(\vec{v}))$

$= (\vec{u}|\vec{v})$.

* En dim > 2



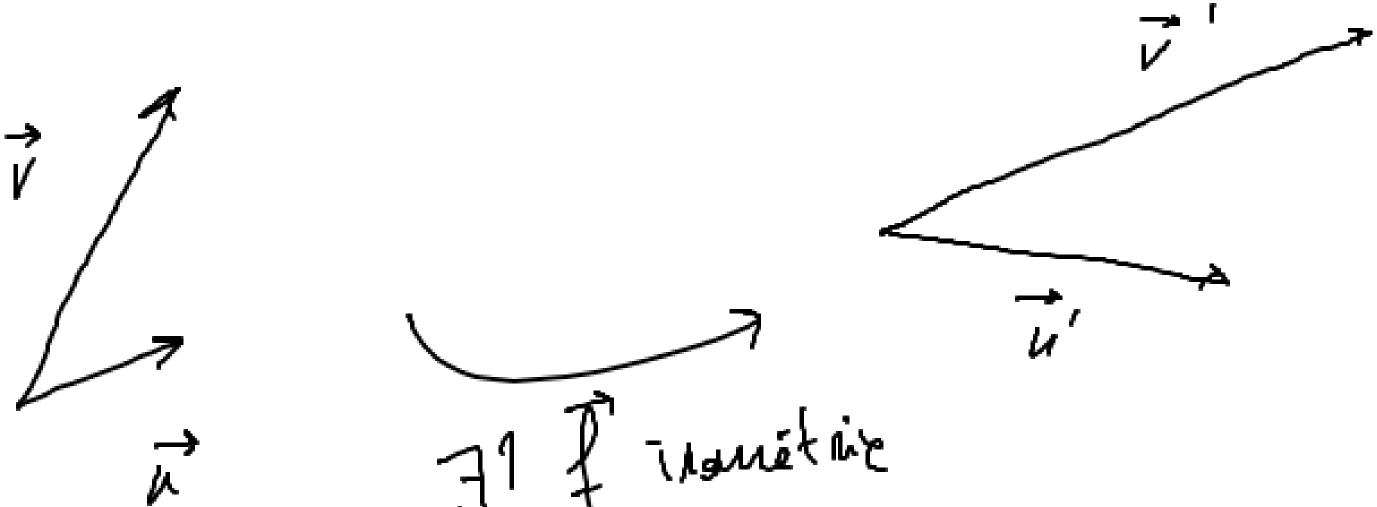


$\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(\vec u, \vec v)$ $\qquad$ $\mathcal{P}' = \mathrm{Vect}(\vec{u'}, \vec{v'})$

Hyp : $(\vec u \,|\, \vec v) = (\vec{u'} \,|\, \vec{v'})$

On construit $\vec f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ isométrie tq. $\vec f(\vec u) = \vec{u'}$ et $\vec f(\vec v) = \vec{v'}$ comme précédemment, et on la complète en une isométrie de l'espace en choisissant des b.o.n. de $\mathcal{P}^\perp$ et de $\mathcal{P}'^\perp$. $\square$

Rq Il est essentiel de travailler avec des vecteurs unitaires.
Pour généraliser, il faut introduire plus de conditions :



$\exists!\ \vec{f}$ isométrie tq [...]

* $\|\vec{u}\,'\| = \|\vec{u}\|$
* $\|\vec{v}\,'\| = \|\vec{v}\|$
* $(\vec{v}\,' | \vec{u}\,') = (\vec{v} | \vec{u})$

<u>CN</u>

$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}\,' \Rightarrow \|\vec{u}\,'\| = \|\vec{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$

$\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}\,' \Rightarrow \|\vec{v}\,'\| = \|\vec{f}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$

$(\vec{v}\,' | \vec{u}\,') = (\vec{f}(\vec{v}) | \vec{f}(\vec{u})) = (\vec{v} | \vec{u})$

<u>CS</u> : Exercice.

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

$|(\vec{u}|\vec{v})| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| = 1$ (Cauchy-Schwarz)

donc $(\vec{u}|\vec{v}) \in [-1,1]$.

Définition_ On appelle <u>angle géométrique</u> des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos\theta = (\vec{u}|\vec{v})$, c'est-à-dire

$$\theta = \operatorname{Arccos}(\vec{u}|\vec{v}).$$

Notation : $\theta = \widehat{\vec{u},\vec{v}}$

Plus généralement, pour $\vec{u},\vec{v}$ non nuls mais pas nécessairement unitaires

$$\widehat{\vec{u},\vec{v}} = \operatorname{Arcos}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \,\middle|\, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$$

Par définition même, $(\vec{u}|\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u},\vec{v}}$.

Rq. On parle également d'angles non orientés car l'ordre des vecteurs n'a pas d'importance :

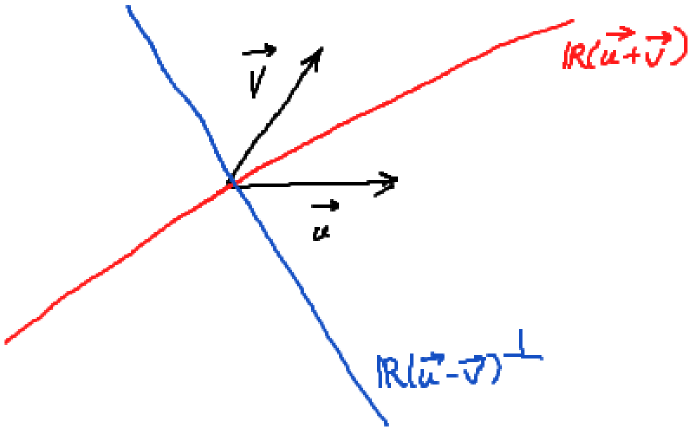
$$\widehat{\vec{v},\vec{u}} = \widehat{\vec{u},\vec{v}}$$

Reformulation du résultat du début : $\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}'$ unitaires

$\exists \vec{f}$ isométrie tq. $\vec{f}(\vec{u})=\vec{u}'$ et $\vec{f}(\vec{v})=\vec{v}'$ $\iff$ $\widehat{\vec{u},\vec{v}} = \widehat{\vec{u}',\vec{v}'}$.

Exemple

$\widehat{\vec u,\vec v} = \widehat{\vec v,\vec u} \iff \exists\, \vec f$ isométrie telle que $\vec f(\vec u)=\vec v$ et $\vec f(\vec v)=\vec u$.



Comme $\|\vec u\|=\|\vec v\|=1$, on a

$$(\vec u+\vec v|\vec u-\vec v) = \|\vec u\|^2-\|\vec v\|^2 = 0$$

et donc $\vec u-\vec v \in \mathbb R(\vec u+\vec v)^\perp$.

* Cas particulier : $\vec u+\vec v=\vec 0$, c'est-à-dire $\vec v=-\vec u$.

Dans ce cas, on peut prendre pour $\vec f$ la symétrie par rapport à l'origine.

* Cas général : $\vec u+\vec v\neq\vec 0$.

Soit $\vec s$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb R(\vec u+\vec v)$.

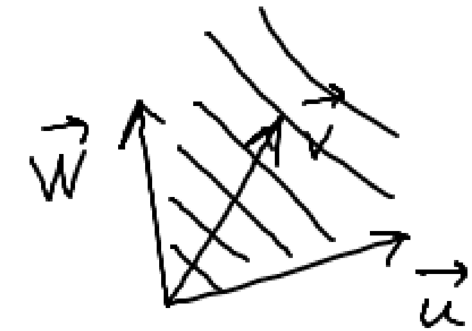
L'écriture $\vec u = \frac12(\vec u+\vec v)+\frac12(\vec u-\vec v)$ est la décomposition de $\vec u$ relativement à la somme directe $\vec E = \mathbb R(\vec u+\vec v)\oplus\mathbb R(\vec u+\vec v)^\perp$, donc $\vec s(\vec u) = \frac12(\vec u+\vec v)-\frac12(\vec u-\vec v)=\vec v$.

Comme $\vec s\circ\vec s = id$, on en déduit $\vec s(\vec v)=\vec u$ et l'on peut donc prendre $\vec f=\vec s$.

Relation de Chasles

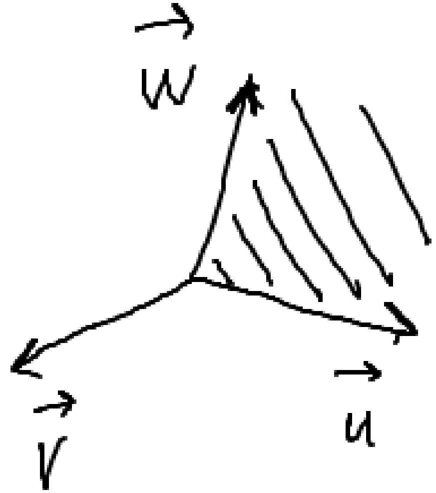
$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$

$$\boxed{\widehat{\vec{u},\vec{v}} + \widehat{\vec{v},\vec{w}} = \widehat{\vec{u},\vec{w}}}$$



si $\vec{v}$ est $\boxed{\text{entre}}$ $\vec{u}$ et $\vec{w}$, c'est-à-dire $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{u} + \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{w}$.

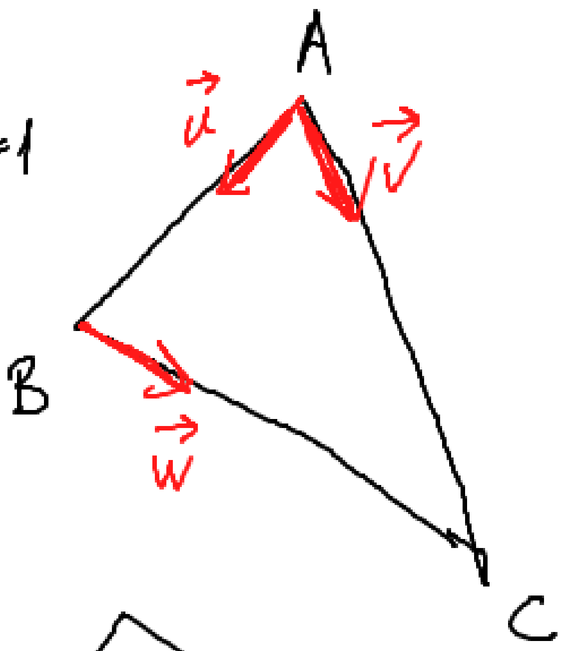
Rq



Preuve : la prochaine fois

Application

$\|\vec u\| = \|\vec v\| = \|\vec w\| = 1$



$\hat A = \widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} = \widehat{\vec u, \vec v}$

$\hat B = \widehat{\vec{BA}, \vec{BC}} = \widehat{-\vec u, \vec w}$

$\hat C = \widehat{\vec{CA}, \vec{CB}} = \widehat{-\vec v, -\vec w}$

$$\boxed{\hat A + \hat B + \hat C = \pi}$$

Preuve $\widehat{-\vec v, -\vec w} = \widehat{\vec v, \vec w}$ car $s_O = -id$ transforme $\vec v$ en $-\vec v$, $\vec w$ en $-\vec w$ et une isométrie

$\widehat{\vec u, \vec v} + \left[\widehat{-\vec v, -\vec w}\right] = \widehat{\vec u, \vec v} + \widehat{\vec v, \vec w} \overset{\otimes}{=} \widehat{\vec u, \vec w}$

$\otimes$ si $\vec v$ est entre $\vec u$ et $\vec w$.

$\widehat{\vec u, \vec w} + \widehat{-\vec u, \vec w} = \widehat{\vec u, \vec w} + \widehat{\vec w, -\vec u} = \widehat{\vec u, -\vec u} = \pi$.

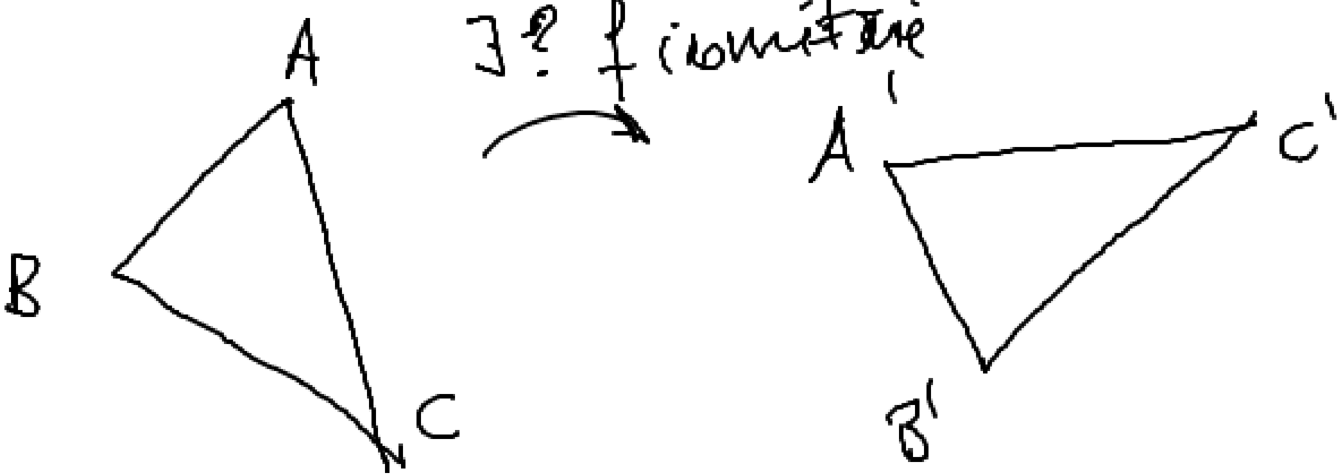
Vérifions (*)

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1}{AC}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{AC}\left(AB\,\vec{u} + BC\,\vec{w}\right)$$

$$= \frac{AB}{AC}\,\vec{u} + \frac{BC}{AC}\,\vec{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,\vec{u} + \mathbb{R}_{\geq 0}\,\vec{w}.$$

Application : premier cas d'isométrie des triangles.

$\exists ?\ f$ isométrie



Existence d'une isométrie f tq. $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$

$$\Updownarrow$$

$A'B'=AB$, $A'C'=AC$, $\hat{A}'=\hat{A}$.

Preuve Cf. p. 6

$\|\overrightarrow{A'B'}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$

$\|\overrightarrow{A'C'}\|=\|\overrightarrow{AC}\|$

$\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}=\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}} \iff (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'}|\overrightarrow{A'C'})$ $\square$