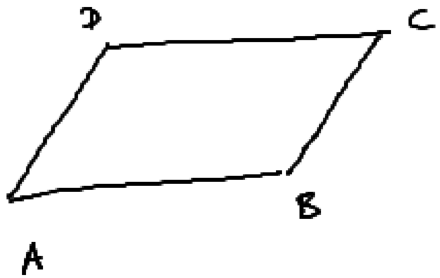
Rq Égalité du parallélogramme



$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

Vectoriellement, cela s'écrit $\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = 2\left(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2\right)$

$(\vec{v} = \overrightarrow{AB},\ \vec{w} = \overrightarrow{BC})$

Si on considère une norme $\|.\|$ quelconque sur $\vec{E}$ (non nécessairement déduite d'un produit scalaire)

(ex : $\vec{E} = \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ ou $\|(x,y)\| = \max(|x|, |y|)$), alors

$\|.\|$ provient d'un produit scalaire ssi l'égalité du parallélogramme est vraie (pour tous $\vec{v}, \vec{w}$)

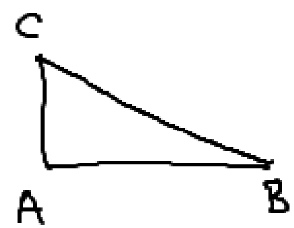
(Thm. de von Neumann)

1.3. Orthogonalité

$\vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}$ sont dits orthogonaux si $(\vec{v} \mid \vec{w}) = 0$.

Caractérisation métrique : thm. de Pythagore

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux ssi $AB^2 + AC^2 = BC^2$



Définition – $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ deux sous-espaces affines

On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux si $\qquad$ Notation : $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$

$$\forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}, \ \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{G}}, \qquad (\vec{v} \mid \vec{w}) = 0.$$

Ex (dim $\mathcal{E} = 3$)

$\vec{\mathcal{F}} \perp \vec{\mathcal{G}}$

Remarques

1) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux, alors

$$\vec{\mathcal{F}} \subset \{\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \mid \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{G}},\ (\vec{v} \mid \vec{w}) = 0\} = \vec{\mathcal{G}}^{\perp} \quad \text{(orthogonal de } \vec{\mathcal{G}}\text{)}$$

On sait que $\dim(\vec{\mathcal{G}}^{\perp}) = \dim(\vec{\mathcal{E}}) - \dim(\vec{\mathcal{G}})$, donc

$$\dim(\vec{\mathcal{F}}) \leqslant \dim(\vec{\mathcal{E}}) - \dim(\vec{\mathcal{G}})$$

ou encore

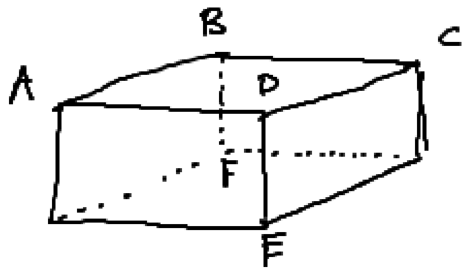
$$\dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) \leqslant \dim(\mathcal{E}).$$

2) Si $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{P\}$ (singleton).

En effet, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}}$ (cf. cours 2). Comme $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{G}}^{\perp}$, $\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}} \subset \vec{\mathcal{G}}^{\perp} \cap \vec{\mathcal{G}} = \{\vec{0}\}$ car $\vec{\mathcal{G}} + \vec{\mathcal{G}}^{\perp} = \vec{\mathcal{E}}$. On a donc $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \dim(\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}}) = 0$.

Si $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$ et si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont dits <u>perpendiculaires</u>.

<u>Ex</u>.

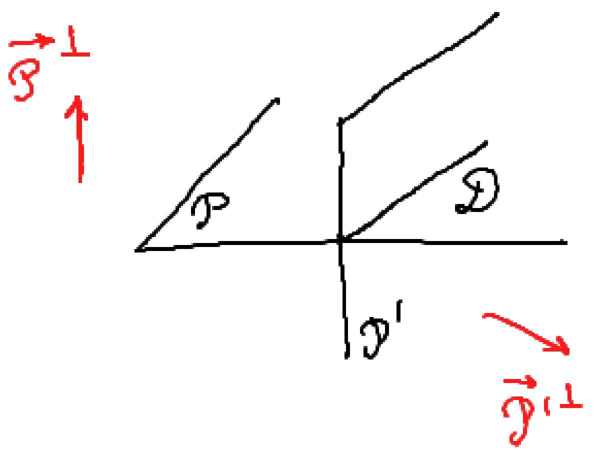


Parallélépipède rectangle

(AB) et (DF) sont orthogonales

(AB) et (BF) sont perpendiculaires.

Abus <u>de</u> langage : plans perpendiculaires en dim 3



On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si

si $\quad \vec{\mathcal{P}}^{\perp} \perp \vec{\mathcal{P}'}^{\perp}$.

Exemple : hyperplan médiateur d'un segment.

$A, B \in \mathcal{E}$ $\qquad$ I : milieu de $[AB]$

$$\{ M \in \mathcal{E} \mid MA = MB \} = I + (\mathbb{R}\overrightarrow{AB})^{\perp}$$ est l'hyperplan médiateur de $[AB]$

Preuve

$$MA^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\|^2 = MI^2 + IA^2 + 2(\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{IA})$$

$$MB^2 = MI^2 + IB^2 + 2(\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{IB})$$

---

donc $MB^2 - MA^2 = IB^2 - IA^2 + 2(\overrightarrow{MI} \mid \underbrace{\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}}_{=\overrightarrow{AB}}) = 2(\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{AB})$

Ainsi, $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow M \in I + (\mathbb{R}\overrightarrow{AB})^{\perp}$.

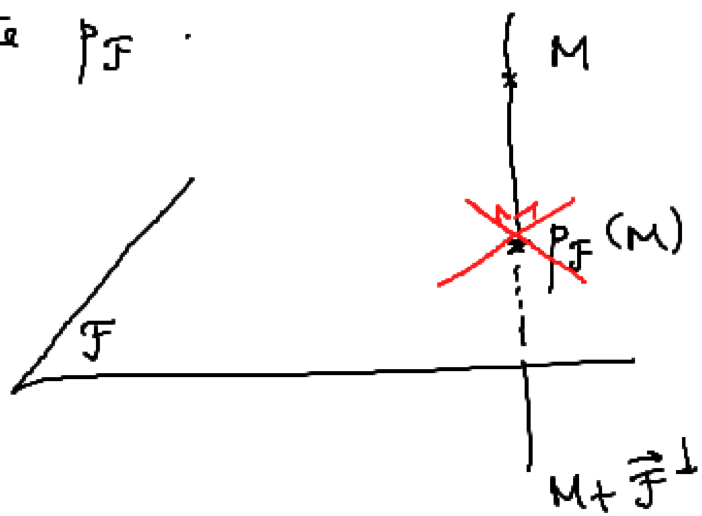
1.4. Projections et symétries orthogonales.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ sous-espace affine

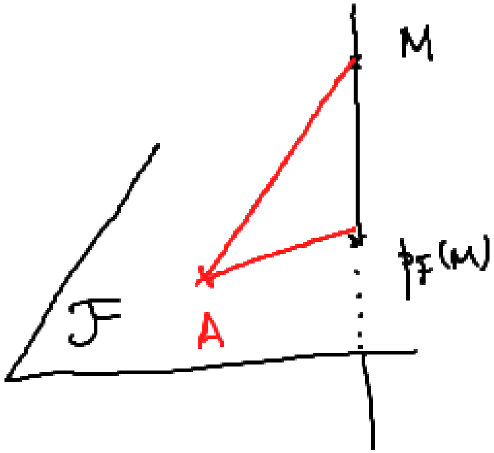
$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{F}}^{\perp}$ $\vec{\mathcal{F}}^{\perp}$ est un supplémentaire de $\vec{\mathcal{F}}$

La projection orthogonale sur $\mathcal{F}$ est la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\vec{\mathcal{F}}^{\perp}$.

On la note $p_{\mathcal{F}}$.



Caractérisation de $p_{\mathcal{F}}$ en termes de distance



$p_{\mathcal{F}}(M)$ est l'unique point A de $\mathcal{F}$ qui minimise la distance MA.

Autrement dit : $\forall A \in \mathcal{F}$, $MA \geq Mp_{\mathcal{F}}(M)$ avec égalité ssi $A = p_{\mathcal{F}}(M)$.

Soit $A \in \mathcal{F}$

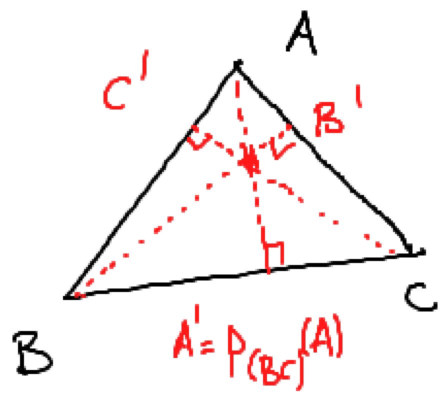
$$MA^2 = Mp_{\mathcal{F}}(M)^2 + p_{\mathcal{F}}(M)A^2 + 2\left(\overrightarrow{Mp_{\mathcal{F}}(M)} \,\middle|\, \overrightarrow{p_{\mathcal{F}}(M)A}\right)$$

$\overrightarrow{p_{\mathcal{F}}(M)A} \in \vec{\mathcal{F}}$ et $\overrightarrow{Mp_{\mathcal{F}}(M)} \in \vec{\mathcal{F}}^{\perp}$, donc $\left(\overrightarrow{Mp_{\mathcal{F}}(M)} \,\middle|\, \overrightarrow{p_{\mathcal{F}}(M)A}\right) = 0$.

$$MA^2 = Mp_{\mathcal{F}}(M)^2 + p_{\mathcal{F}}(M)A^2 \geq Mp_{\mathcal{F}}(M)^2$$

, avec égalité ssi $p_{\mathcal{F}}(M)A = 0$, i.e. $A = p_{\mathcal{F}}(M)$. □

Exemple : hauteurs d'un triangle ABC non plat.



La hauteur issue de A est $(A p_{(BC)}(A))$

Les trois hauteurs sont concourantes en un point H, appelé orthocentre de ABC.

Les hauteurs issues de A et de B sont nécessairement sécantes : sinon, elles seraient parallèles, donc $(\vec{BC})^{\perp} = (\vec{AC})^{\perp}$ et $(\vec{BC}) = (\vec{AC})$, d'où A, B, C seraient alignés. Soit H leur point d'intersection.

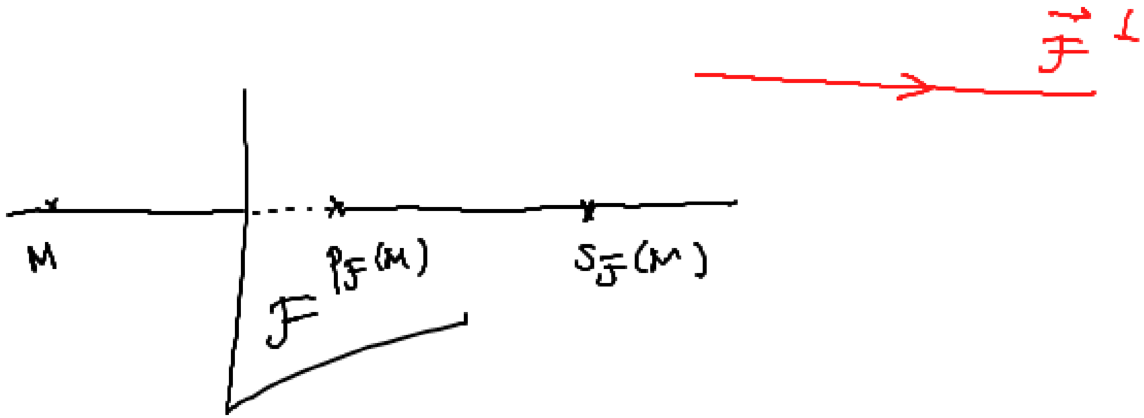
Par hypothèse : $0 = (\vec{HA} | \vec{CB}) = (\vec{HA} | \vec{HB} - \vec{HC})$, donc $(\vec{HA} | \vec{HB}) = (\vec{HA} | \vec{HC})$

$0 = (\vec{HB} | \vec{CA}) = (\vec{HB} | \vec{HA} - \vec{HC})$, donc $(\vec{HA} | \vec{HB}) = (\vec{HB} | \vec{HC})$

$(\vec{HC} | \vec{AB}) = (\vec{HC} | \vec{HB} - \vec{HA}) = (\vec{HC} | \vec{HB}) - (\vec{HC} | \vec{HA}) = (\vec{HB} | \vec{HC}) - (\vec{HA} | \vec{HC}) = (\vec{HA} | \vec{HB}) - (\vec{HA} | \vec{HB}) = 0.$

Le point H appartient donc à la hauteur issue de C.

La symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ est la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$, parallèlement à $\vec{\mathcal{F}}^{\perp}$. Notation : $s_{\mathcal{F}}$



$$\overrightarrow{M s_{\mathcal{F}}(M)} = 2\, \overrightarrow{M p_{\mathcal{F}}(M)}.$$

Cas particulier : si $\mathcal{F}$ est un hyperplan, alors $s_{\mathcal{F}}$ est une réflexion.

1.5. Repères orthonormés

Un repère cartésien $(O; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ de $\mathcal{E}$ est dit orthonormé si $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base orthonormée de $\vec{\mathcal{E}}$: $(\vec{e_i} | \vec{e_j}) = \delta_{ij}$.

Fait important : $\vec{\mathcal{E}}$ possède toujours des bases orthonormées.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de transformer n'importe quelle base de $\vec{\mathcal{E}}$ en une base orthonormée.

[Rappel] Soit $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$.

On pose $\vec{\varepsilon_1} = \dfrac{\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|}$ $\qquad \|\vec{\varepsilon_1}\| = 1$

On pose $\vec{\varepsilon_2} = \dfrac{\vec{e_2} + \lambda \vec{\varepsilon_1}}{\|\vec{e_2} + \lambda \vec{\varepsilon_1}\|}$, avec λ tq. $(\vec{e_2} + \lambda \vec{\varepsilon_1} | \vec{\varepsilon_1}) = 0 \iff (\vec{e_2} | \vec{\varepsilon_1}) + \lambda = 0$

$\iff \boxed{\lambda = -(\vec{e_2} | \vec{\varepsilon_1})}$

On pose $\vec{\varepsilon_3} = \dfrac{\vec{e_3} + \lambda_1 \vec{\varepsilon_1} + \lambda_2 \vec{\varepsilon_2}}{\| \vec{e_3} + \lambda_1 \vec{\varepsilon_1} + \lambda_2 \vec{\varepsilon_2} \|}$ avec λ_1, λ_2 tels que

$0 = (\vec{e_3} + \lambda_1 \vec{\varepsilon_1} + \lambda_2 \vec{\varepsilon_2} \mid \vec{\varepsilon_1}) = (\vec{e_3} + \lambda_1 \vec{\varepsilon_1} + \lambda_2 \vec{\varepsilon_2} \mid \vec{\varepsilon_2})$, c'est-à-dire :

$0 = (\vec{e_3} \mid \vec{\varepsilon_1}) + \lambda_1$ et $(\vec{e_3} \mid \vec{\varepsilon_2}) + \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = -(\vec{e_3} \mid \vec{\varepsilon_1})$ $\qquad \lambda_2 = -(\vec{e_3} \mid \vec{\varepsilon_2})$

etc.

$$\vec{\varepsilon_k} = \frac{\vec{e_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k \mid \varepsilon_i)\, \varepsilon_i}{\| \vec{e_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k \mid \varepsilon_i)\, \varepsilon_i \|} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

La base $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n})$ est orthonormée.

L'intérêt d'un repère orthonormé est de fournir une expression simple des produits scalaires et des distances à partir des coordonnées.

$(O; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ repère orthonormé

$A(a_1, \dots, a_n)$, $B(b_1, \dots, b_n)$, $C(c_1, \dots, c_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{AB} | \vec{AC}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)(b_i - a_i) \\ AB = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} \end{array} \right.$$

Exemple : distance d'un point à un hyperplan.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ hyperplan

$M \in \mathcal{E}$ $\qquad d(M,\mathcal{F}) = \inf\{AM \mid A \in \mathcal{F}\} = M\,p_{\mathcal{F}}(M)$

On choisit un repère orthonormé de $\vec{\mathcal{E}}$ $\quad (O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

$M(m_1, \dots, m_n)$

$\mathcal{F}$: $\quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n + c = 0$ $\qquad$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$

$$\mathcal{F} = \{N(x_1, \dots, x_n) \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n + c = 0\} = \{N(x_1, \dots, x_n) \mid (\vec{ON} \mid \vec{\alpha}) + c = 0\} \text{ où } \vec{\alpha}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

($\vec{\alpha}$ est un vecteur normal)

$N_0 \in \mathcal{F}$

$(\vec{ON_0} \mid \vec{\alpha}) + c = 0$, donc $\quad \mathcal{F} = \{N \mid (\vec{ON} \mid \vec{\alpha}) = (\vec{ON_0} \mid \vec{\alpha})\} = \{N \mid (\vec{N_0N} \mid \vec{\alpha}) = 0\}$

$= N_0 + (\mathbb{R}\vec{\alpha})^{\perp}$.

$\vec{\mathcal{F}}^{\perp} = \mathbb{R}\vec{\alpha}$

$$p_{\mathcal{F}}(M) = M + t\vec{\alpha}$$

$$p_{\mathcal{F}}(M) \in \mathcal{F} \iff a_1(m_1 + t a_1) + \dots + a_n(m_n + t a_n) + c = 0$$

$$\iff (a_1 m_1 + \dots + a_n m_n + c) + t(a_1^2 + \dots + a_n^2) = 0$$

$$\iff t = \frac{a_1 m_1 + \dots + a_n m_n + c}{\|\vec{\alpha}\|^2}$$

$$p_{\mathcal{F}}(M) = M + \frac{a_1 m_1 + \dots + a_n m_n + c}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$$

$$M p_{\mathcal{F}}(M) = \| \overrightarrow{M p_{\mathcal{F}}(M)} \| = \frac{|a_1 m_1 + \dots + a_n m_n + c|}{\|\vec{\alpha}\|^2} \|\vec{\alpha}\| = \frac{|a_1 m_1 + \dots + a_n m_n + c|}{\|\vec{\alpha}\|}$$

$$= \frac{|a_1 m_1 + \dots + a_n m_n + c|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$