Rappel :

$$\{(A_1, m_1), \dots, (A_r, m_r)\} \qquad \text{points pondérés}$$

$m_i \in K$

Si $M = \sum_{i=1}^{r} m_i \neq 0$, alors il existe un unique point G

tel que
$$\sum_{i=1}^{r} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

G est le barycentre de la famille de pts pondérés.

Rq De manière équivalente : pour tout $A \in \mathcal{E}$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{r} m_i \overrightarrow{AA_i}$$

Cas particulier : si $m_1 = \dots = m_r$, alors G est l'isobarycentre des points $A_1, \dots, A_r$.

Rq. On ne modifie pas le barycentre si l'on multiplie tous les poids m_i par un même scalaire $\neq 0$.

Exemple $A, B \in \mathcal{E}$ Isobarycentre ?

$\{(A,1),(B,1)\}$ $1+1=2$

Si $2 \neq 0$ dans K, par exemple si $K = \mathbb{R}$, alors l'isobarycentre de A et B est le pt G tq $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$

ou encore $\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB}}$

G est donc le milieu de [AB].

Proposition (Associativité) — On ne change pas le barycentre d'une famille de points pondérés lorsqu'on remplace un certain nombre d'entre eux dont la somme des poids est $\neq 0$ par leur barycentre, affecté de la somme de ces poids.

Autrement dit :

$$\{(A_1, m_1), \dots, (A_r, m_r)\}$$

$$\{1, \dots, r\} = I_0 \sqcup \dots \sqcup I_q \qquad \text{partition telle que}$$

$$M_k = \sum_{i \in I_k} m_i \neq 0 \qquad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, q\}$$

$$\mathrm{Bar}\,\{(A_1, m_1), \dots, (A_r, m_r)\} = \mathrm{Bar}\,\{(G_0, M_0), \dots, (G_q, M_q)\}$$

avec $G_k = \mathrm{Bar}\,\{(A_i, m_i)\ ;\ i \in I_k\}$.

Dém.

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{k=0}^{q} \left(\sum_{i \in I_k} m_i \overrightarrow{GA_i} \right)$$

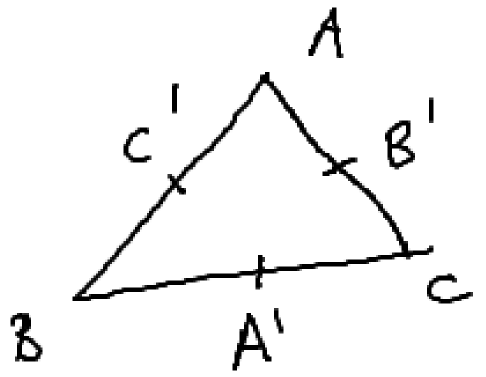
$$= \sum_{k=0}^{q} \left(\sum_{i \in I_k} m_i (\overrightarrow{GG_k} + \overrightarrow{G_kA_i}) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \left(M_k \cdot \overrightarrow{GG_k} + \underbrace{\sum_{i \in I_k} m_i \overrightarrow{G_kA_i}}_{= \vec{0}} \right) \quad \text{par déf. de } G_k$$

$$= \sum_{k=0}^{q} M_k \overrightarrow{GG_k}$$

donc $G = \mathrm{Bar}\{(G_0, M_0), \ldots ; (G_q, M_q)\}$. $\square$

Conséquence : les médianes d'un triangle sont concourantes



$$G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$$

$$= \mathrm{Bar}\{(C',2),(C,1)\}$$

donc $G \in (CC')$ car $2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

De même, $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(A',2)\}$ $\quad$ A' = milieu de $[BC]$

donc $G \in (AA')$

$G = \mathrm{Bar}\{(B,1),(B',2)\}$ $\quad$ $G \in (BB')$

$$2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = 0 \iff \overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'} = 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'}$$

$$\iff 3\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CC'} \iff \boxed{\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}}$$

Thm de Varignon

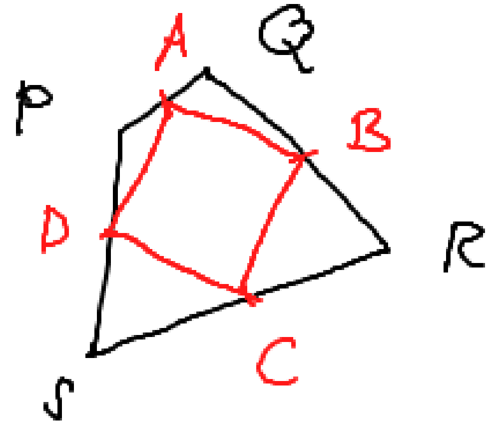
PQRS quadrilatère

A milieu de [PQ]

B " [QR]

C " [RS]

D " [PS]



ABCD est un parallélogramme.

$$G = \mathrm{Bar}\{(P,1),(Q,1),(R,1),(S,1)\}$$

$$= \mathrm{Bar}\{(A,2),(C,2)\}$$ donc G = milieu de [AC]

$$= \mathrm{Bar}\{(B,2),(D,2)\}$$ donc G = milieu de [BD]

Les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme

Caractérisation des sous-espaces affines

Prop _ (i) Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine.

$\mathcal{F}$ est stable par barycentration : si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{K}$

avec $\sum m_i \neq 0$, alors $G = \mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)\} \in \mathcal{F}$.

(ii) Réciproquement, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{E}$ stable par barycentration alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

Preuve (i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}) = \vec{0}$

$\displaystyle\Rightarrow \left(\sum m_i\right) \overrightarrow{GA_1} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{A_1A_i} = \vec{0}$

$\displaystyle\Rightarrow \overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{A_1A_i} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ et donc $G = A_1 + \overrightarrow{A_1G} \in \mathcal{F}$.

$M = \sum m_i$

(ii) $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ partie stable par barycentration.

$F = \{ \overrightarrow{AB} \ ; \ A, B \in \mathcal{F} \}$ est-il un s.e.v. de $\vec{\mathcal{E}}$?

* $\vec{0} \in F$ car $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$

* $A, B, C, D \in \mathcal{F}$ $\qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

$$= \overrightarrow{AG}$$

où $G = \mathrm{Bar}\{(B,1), (C,-1), (D,1)\} \in \mathcal{F}$ par hypothèse

On a donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \in F$.

* $A, B \in \mathcal{F}$, $\lambda \in K$ $\qquad \lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ avec $C \in \mathcal{E}$

Il faut voir que l'on a $C \in \mathcal{F}$.

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{CB}$, donc $(1-\lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

On en déduit $C = \mathrm{Bar}\{(A, 1-\lambda), (B, \lambda)\} \in \mathcal{F}$ par hypothèse. $\square$

En particulier, si $A_0, \dots, A_N \in \mathcal{E}$, alors

$$\mathrm{Aff}(A_0, \dots, A_N) = A_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_N})$$

(sous-espace affine engendré par $A_0, \dots, A_N$) est l'ensemble de tous les barycentres des $(A_0, m_0), \dots, (A_N, m_N)$ avec $m_i \in K$ et $\sum_{i=1}^{N} m_i \neq 0$ [exercice]

Ex : $(AB) = \left\{ \mathrm{Bar}\{(A, a), (B, b)\} \;;\; \begin{array}{l} a, b \in K \\ a+b \neq 0 \end{array} \right\}$ $\lambda = \frac{a}{a+b}$

$$= \{\mathrm{Bar}\{(A, \lambda), (B, 1-\lambda)\} \;;\; \lambda \in K\}$$

Barycentres et applications affines

Prop. (i) Les applications affines préservent les barycentres, c'est-à-dire : si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine,

$$f\left(\mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), \dots, (A_r, m_r)\}\right) = \mathrm{Bar}\{(f(A_1), m_1), \dots, (f(A_r), m_r)\}$$

pour tous $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{E}$

$m_1, \dots, m_r \in K$ avec $\sum m_i \neq 0$

(ii) La réciproque est vraie : si une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ préserve les barycentres, alors f est une application affine.

Dém (i)

$$G = \mathrm{Bar}\{(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)\}$$

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \vec{0}$$

et donc

$$f(G) = \mathrm{Bar}\{(f(A_1), m_1), \dots, (f(A_n), m_n)\}.$$

(ii) Admis.

$\square$

En particulier, une application affine préserve toujours le milieu d'un segment : si I est le milieu de $[AB]$, alors $f(I)$ est le milieu de $[f(A), f(B)]$.

Coordonnées barycentriques

$\{A_0, \dots, A_n\}$ repère affine de $\mathcal{E}$.

Tout point M de $\mathcal{E}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$M = \mathrm{Bar}\{(A_0, m_0), \dots ; (A_n, m_n)\}$$

avec $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$. Les scalaires $m_0, \dots, m_n$ sont les coordonnées barycentriques de M dans ce repère

Dém. * <u>Unicité</u>

$$M = \mathrm{Bar}\{(A_0,m_0),\dots,(A_n,m_n)\} = \mathrm{Bar}\{(A_0,m_0'),\dots,(A_n,m_n')\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i = \sum_{i=0}^{n} m_i' = 1$$

$$\vec{0} = \sum_{i=0}^{n} m_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=0}^{n} m_i' \overrightarrow{MA_i}$$

donc

$$\vec{0} = \Big(\sum_{i=0}^{n} m_i\Big)\overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=0}^{n} m_i \overrightarrow{A_0A_i} = \Big(\sum_{i=0}^{n} m_i'\Big)\overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=0}^{n} m_i' \overrightarrow{A_0A_i}$$

d'où

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{\substack{i=0\\ i=1}}^{n} m_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{\substack{i=0\\ i=1}}^{n} m_i' \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Comme $\{\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n}\}$ est une base de $\vec{E}$, $m_1' = m_1, \dots, m_n' = m_n$. Finalement,

$$m_0' = \sum_{i=0}^{n} m_i' - \sum_{i=1}^{n} m_i' = 1 - \sum_{i=1}^{n} m_i' = 1 - \sum_{i=1}^{n} m_i = m_0. \qquad \square$$