1.4. Applications affines

1.4.1. Définitions

$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ affine si $\forall$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ pour tout $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ $f(A+\vec{v}) = f(A) + \vec{f}(\vec{v})$

pour une certaine application linéaire $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{F}}$

1.4.2. Exemples

* Translations $\quad f = t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \qquad \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$

$\vec{f} = id_{\mathcal{E}}$

$$f(A+\vec{v}) = A + \vec{v} + \vec{u} = (A+\vec{u}) + \vec{v} = f(A) + \vec{v}.$$

* Homothéties centre A $\quad f(A+\vec{v}) = A + \lambda\vec{v}$

$\lambda \in K^*$ $\quad \vec{f} = \lambda\, id_{\mathcal{E}}$

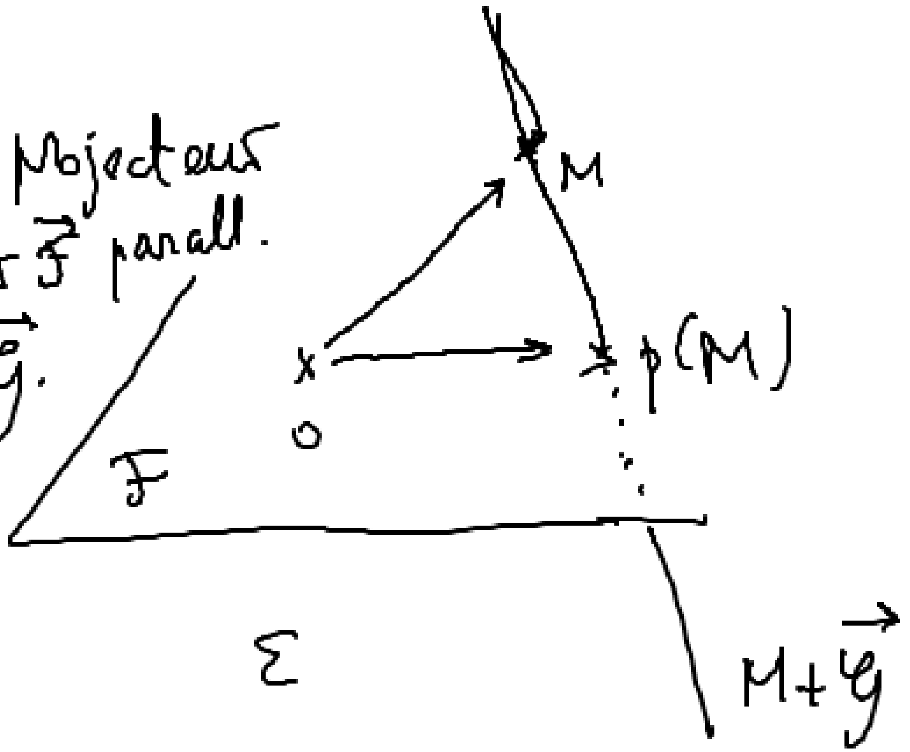
* Projections affines

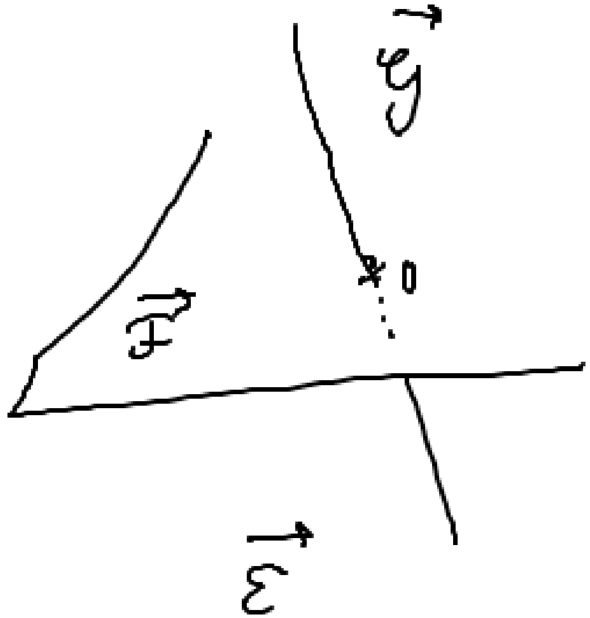
$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ sous-espace affine

$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{G}}$ $\qquad$ $\vec{\mathcal{G}}$: supplémentaire de $\vec{\mathcal{F}}$

$p : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\vec{\mathcal{G}}$

$\vec{p}$: projecteur sur $\vec{\mathcal{F}}$ parall. à $\vec{\mathcal{G}}$.



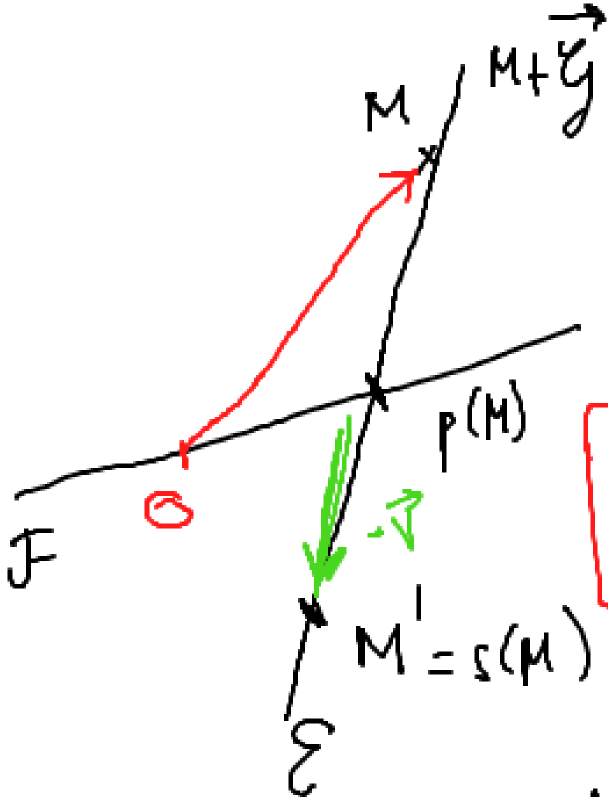


Symétries affines

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ sous-espace affine

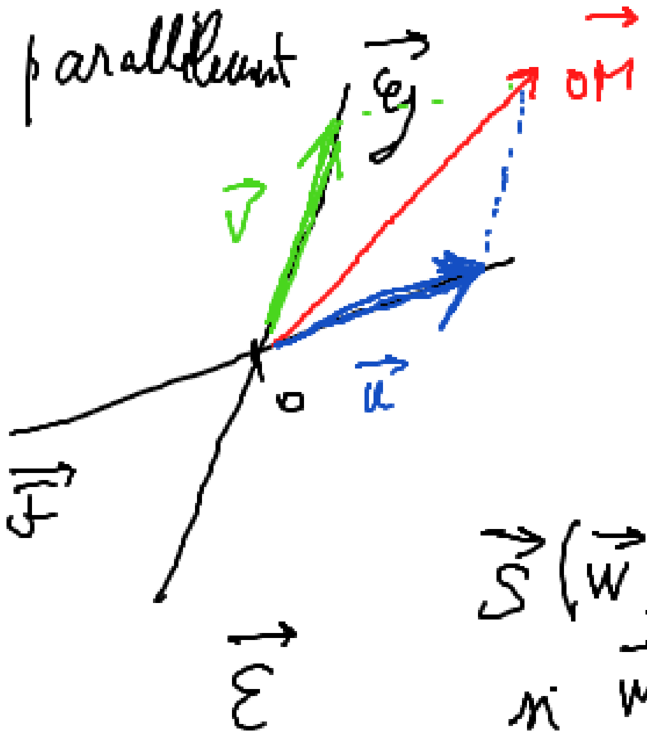
$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{G}}$ $\quad$ $\vec{\mathcal{G}}$: supplémentaire de $\vec{\mathcal{F}}$

$s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$, parallèlement à $\vec{\mathcal{G}}$



$$\boxed{\overrightarrow{O\,s(M)} = \vec{u} - \vec{v}}$$

$$\overrightarrow{M\,p(M)} = \overrightarrow{p(M)\,s(M)}$$



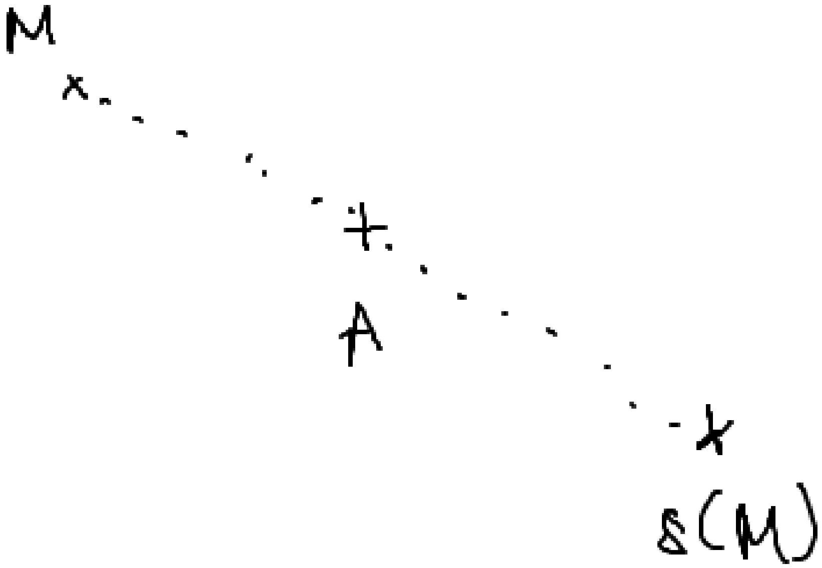
$\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{S}(\vec{w}) = \vec{u} - \vec{v}$

si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Cas particulier : $\mathcal{F} = \{A\}$

$\vec{\mathcal{F}} = \vec{0}$, donc $\vec{\mathcal{G}} = \vec{E}$



$\overrightarrow{As(M)} = \overrightarrow{MA}$

s est la symétrie de centre A.

1.4.3. Propriétés

1) Effet d'une application affine sur un sous-espace affine.

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \quad \text{affine}$$

$\boxed{\text{$f(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine, de direction $\vec{f}(\vec{\mathcal{G}})$}}$

$\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sous-espace affine, $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} f(\mathcal{G}) &= f\left(\{A+\vec{v}\ ;\ \vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}\}\right) \\ &= \{f(A+\vec{v})\ ;\ \vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}\} \\ &= \{f(A)+\vec{f}(\vec{v})\ ;\ \vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}\} = f(A) + \underbrace{\overbrace{\vec{f}}^{\text{application linéaire}}(\overbrace{\vec{\mathcal{G}}}^{\text{sous-ev de } \vec{\mathcal{E}}})}_{\text{sous-ev de } \vec{\mathcal{F}}} \end{aligned}$$

Conséquences

* f conserve l'alignement : si $A, B, C \in \mathcal{E}$ sont alignés, alors $f(A), f(B), f(C) \in \mathcal{F}$ sont alignés

En effet : $C \in (AB) \Rightarrow f(C) \in f((AB)) \overset{*}{=} f(A) + K \vec{f}(\vec{AB})$

* $(AB) = A + K\vec{AB}$ donc $f((AB)) = f(A + K\vec{AB})$
$= f(A) + K\vec{f}(\vec{AB})$.

$= f(A) + K\overrightarrow{f(A)f(B)}$

- si $f(A) \neq f(B)$, alors $f((AB)) = (f(A)f(B))$ et donc $f(C) \in (f(A)f(B))$

- si $f(A) = f(B)$, alors $f(A) = f(B)$ et $f(C)$ sont alignés !

* Plus généralement, f préserve la coplanarité ...

* f préserve le parallélisme

Si $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{E}$ sont parallèles, alors $f(\mathcal{G}_1)$ et $f(\mathcal{G}_2)$ sont parallèles.

En effet : $\vec{\mathcal{G}_1} = \vec{\mathcal{G}_2} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{f(\mathcal{G}_1)} = \vec{f}(\vec{\mathcal{G}_1}) = \vec{f}(\vec{\mathcal{G}_2}) = \overrightarrow{f(\mathcal{G}_2)}$$

* f préserve également le parallélisme faible

$$\vec{\mathcal{G}_1} \subset \vec{\mathcal{G}_2} \Rightarrow \overrightarrow{f(\mathcal{G}_1)} \subset \overrightarrow{f(\mathcal{G}_2)}.$$

2) Détermination d'une application affine

$\mathcal{E}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{F}$

$(A_0, \dots, A_n)$ repère affine de $\mathcal{E}$ $\qquad$ $B_0, \dots, B_n$ $n+1$ points de $\mathcal{F}$

Il existe une et une seule application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que

$$f(A_0) = B_0, \quad f(A_1) = B_1, \dots, f(A_n) = B_n.$$

Existence de f : $\qquad M \in \mathcal{E}$ $\qquad M = A_0 + x_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + x_n \overrightarrow{A_0A_n}$

On pose $f(M) = f(A_0) + x_1 \overrightarrow{B_0B_1} + \dots + x_n \overrightarrow{B_0B_n}$

$\vec{f}$ est l'unique application linéaire $\vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{F}}$

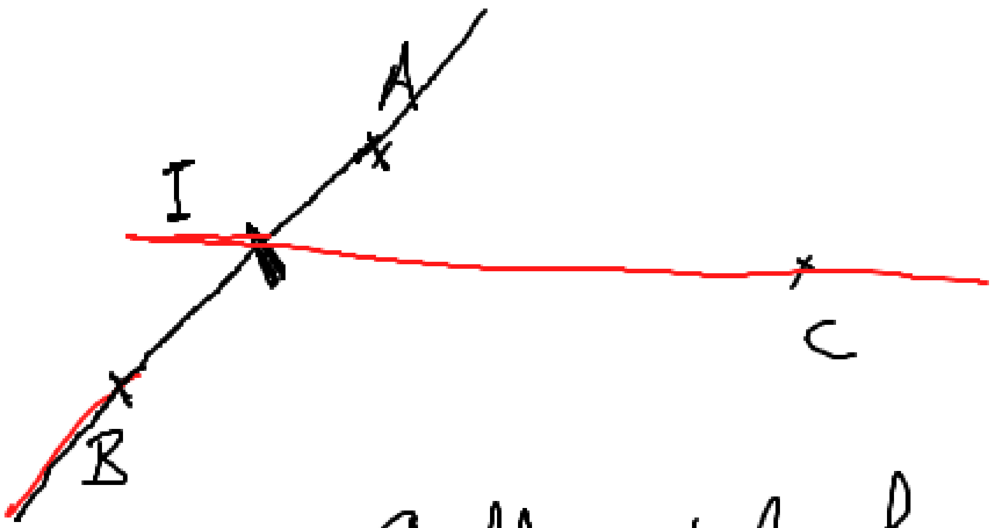
telle que $\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On a : $f(M) = f(A_0) + \vec{f}(\overrightarrow{A_0M})$.

Unicité : immédiate.

Exemple

$(\dim \mathcal{E} = 2)$



Supposons que f soit une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que $f(A) = B$, $f(B) = A$ et $f(C) = C$

Quelles sont les f possibles ?

D'après ce que l'on vient de voir, il existe une et une seule telle application car (A, B, C) est un repère affine de $\mathcal{E}$.

$$f((AB)) = f(A + K\vec{AB}) = f(A) + K\vec{f}(\vec{AB})$$
$$= B + K\vec{BA} = (AB)$$

Soit I le milieu de AB : $\vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$$f(I) = f(A + \vec{AI}) = f(A) + \vec{f}(\vec{AI})$$
$$= f(A) + \vec{f}\left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right)$$
$$= f(A) + \frac{1}{2}\vec{f}(\vec{AB})$$
$$= B + \frac{1}{2}\vec{BA} = I$$

donc f fixe le pt. I.

Conclusion Soit s la symétrie par rapport à (IC) parallèlement à $K.\overrightarrow{AB}$

$s(A) = B = f(A)$

$s(B) = A = f(B)$

$s(C) = C = f(C)$

donc $\boxed{f = s}$

3) Préservation des rapports vectoriels

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda$.

f application affine

$$\boxed{\dfrac{\overrightarrow{f(A)f(C)}}{\overrightarrow{f(A)f(B)}} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}}$$

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \vec{f}(\overrightarrow{AC})$$

$$= \vec{f}(\lambda\overrightarrow{AB}) = \lambda\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \lambda\,\overrightarrow{f(A)f(B)}$$

4) Composition

$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$ deux applications affines

La composée $g \circ f$ est affine, et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$

En effet, si $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$,

$$g \circ f(A+\vec{v}) = g(f(A+\vec{v})) = g(f(A) + \vec{f}(\vec{v}))$$
$$= g(f(A)) + \vec{g}(\vec{f}(\vec{v}))$$
$$= g \circ f(A) + \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{v})$$

5) Représentation matricielle

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$$

On choisit un repère affine $(O; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ de $\mathcal{E}$ et un repère affine $(O'; \vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_m})$ de $\mathcal{F}$.

$$f\left(O + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}\right) = f(O) + \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}\right) = f(O) + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{f}(\vec{e_i})$$

$$= O' + \overrightarrow{O'f(O)} + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{f}(\vec{e_i}) .$$

$$\vec{f}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{\varepsilon_j} , \qquad \overrightarrow{O'f(O)} = c_1 \vec{\varepsilon_1} + \dots + c_m \vec{\varepsilon_m}$$

$$f\left(O+\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}\right) = O' + \overrightarrow{O'f(O)} + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{f}(\vec{e_i})$$

$$= O' + \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\left(c_j + \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}\right)}_{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} + (a_{ji})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \vec{\varepsilon_j}$$

On obtient l'expression matricielle de f :

coordonnées de $f(O)$

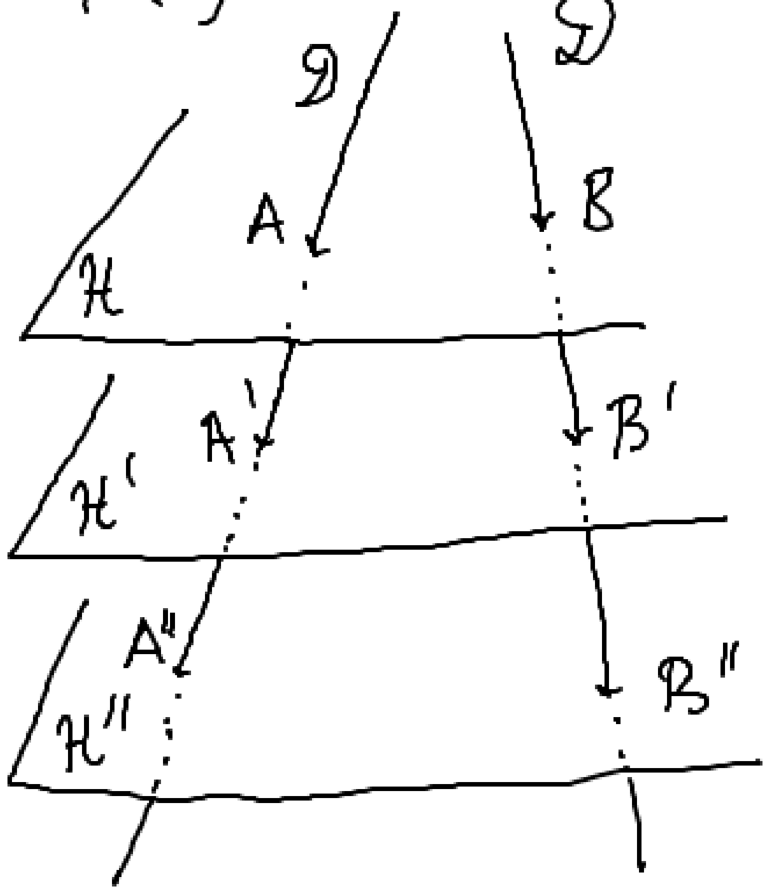
$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (c_1,\dots,c_m) + A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matrice de $\vec{f}$ rel. à $\vec{e}_i, \vec{\varepsilon}_j$

1.4.4. Exemples d'utilisation des applications affines

* Thm. de Thalès

$\dim(\mathcal{E}) = n$



$\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{H}''$ trois hyperplans parallèles de $\mathcal{E}$

$\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites sécantes aux hyperplans

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AA''}} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{BB''}}}$$

p = Projection sur $\mathcal{D}'$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathcal{H}}$.

$p(A)$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}'$ avec $A + \vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$

donc $p(A) = B$.

De même, $p(A') = B'$ et $p(A'') = B''$.

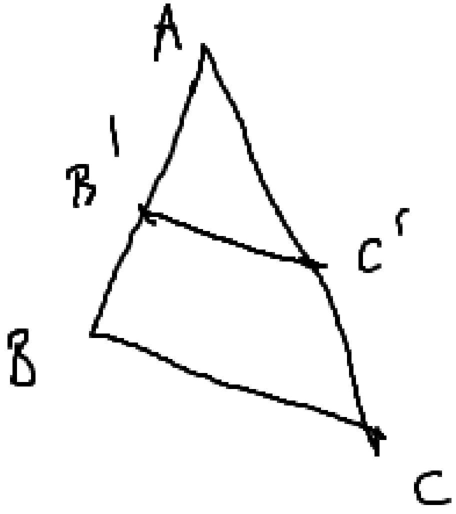
On en déduit

$$\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{BB''}} = \frac{\overrightarrow{p(A)p(A')}}{\overrightarrow{p(A)p(A'')}} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AA''}}$$

p affine

préserve les rapports vectoriels

* Thm de Thalès classique dans le plan



Si $(BC) \parallel (B'C')$, alors

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\lambda = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}}$.

Par construction, $h(B) = B'$.

* $h((BC))$ est le sous-espace affine passant par $h(B) = B'$ et dirigé par $\vec{h}(\overrightarrow{BC}) = \lambda \overrightarrow{BC}$, donc $h((BC))$ est la dte parallèle à (BC) passant par B'. Par hypothèse, $h((BC)) = (B'C')$.
* $h((AC)) = A + K\lambda\overrightarrow{AC} = A + K\overrightarrow{AC} = (AC)$

On en déduit que $h(C)$ est l'intersection de $(B'C')$ et (AC), c'est-à-dire $h(C) = C'$.

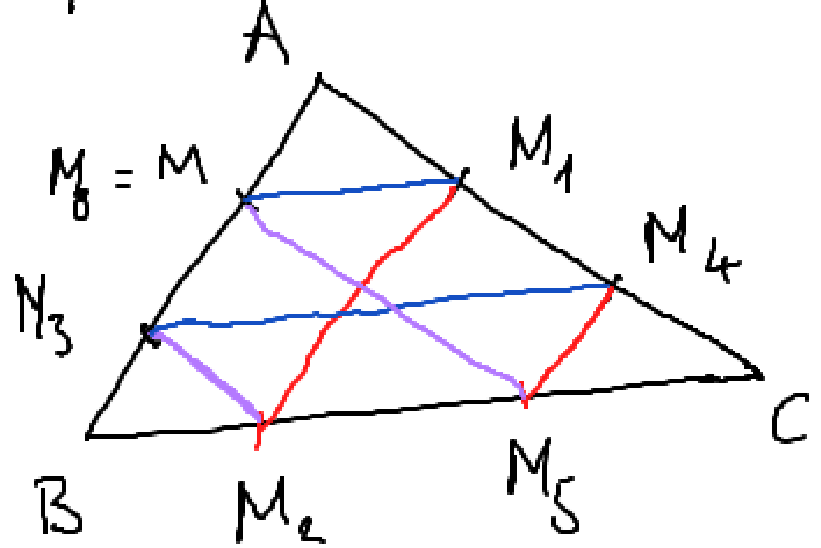
<u>Conclusion</u> :

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{h(A)h(C)} = \vec{h}(\overrightarrow{AC}) = \lambda \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{h(B)h(C)} = \vec{h}(\overrightarrow{BC}) = \lambda \overrightarrow{BC}.$$

* Un exemple amusant ...

(cf. Feuille 2, exercice 7)



$M_6 = M_0$!

Méthode 1 : thm de Thalès (plusieurs fois)

Méthode 2 : avec des applications affines

p_1 = projection sur (AC) parallèlement à (BC)

p_2 = " " (BC) " (AB)

p_3 = " " (AB) " (AC)

$p_1(M_0) = M_1$

$p_1(M_3) = M_4$

$p_2(M_1) = M_2$

$p_2(M_4) = M_5$

$p_3(M_2) = M_3$, $p_3(M_5) = M_6$

$$M_6 = (p_3 \circ p_2 \circ p_1)^2 (M_0)$$

$f = p_3 \circ p_2 \circ p_1$ est une application affine.

$$f(A) = B, \quad f(B) = A, \quad f(C) = A.$$

$$f^2(A) = A, \quad f^2(B) = B, \quad f^2(C) = B$$

f^2 est la projection sur (AB) parallèlement à (BC).

$M_6 = f^2(M_0)$ et donc $M_6 = f^2(M_0) = M_0$ car $M_0 \in (AB)$!