Géométrie affine

Espaces vectoriels : pt particulier 0

Espaces affines : sans pt particulier
(espace homogène)

Corps commutatif K (ex : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,
$\mathbb{Q}$, corps finis $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

1) Espaces et applications affines.

1.1. Espaces affines.

Points	$\mathcal{E}$	
Vecteurs	$\underline{E}$	espace vectoriel
Scalaires	K	

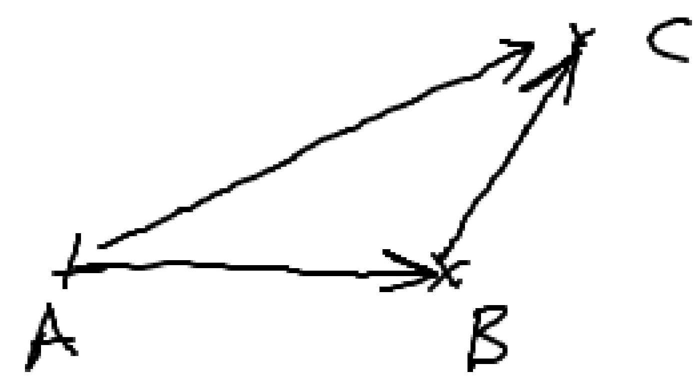
Les vecteurs agissent sur les points en les translatant.

<u>Définition</u> – Un espace affine sur un corps K est la donnée d'un ensemble $\mathcal{E} \neq \emptyset$ de <u>points</u>, d'un espace vectoriel E sur K et d'une application

$$\Phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E, \quad (A,B) \mapsto \Phi(A,B) \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{AB}$$

telle que :

1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Chasles)



2. pour tout point $A \in \mathcal{E}$, l'application $\Phi(A,\cdot) : \mathcal{E} \to E$, $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est une bijection.

Commentaires. (i) Convention : un espace affine est non vide.

(ii) L'espace vectoriel $\mathbb{E}$ est la direction de l'espace affine $\mathcal{E}$. On le note généralement $\vec{\mathcal{E}}$ et ses éléments sont notés $\vec{v}$.

(iii) En général, on laisse $\vec{\mathcal{E}}$ et Φ implicites et on désigne l'espace affine $(\mathcal{E}, \vec{\mathbb{E}}, \Phi)$ par $\mathcal{E}$.

Exemple fondamental

K^3

$$\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in K^3 \mid x+y+z=1\}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \{(x,y,z) \in K^3 \mid x+y+z=0\} \subset K^3 \quad \text{sous-espace vectoriel}$$

$$\Phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{A}, \underbrace{(x',y',z')}_{B} \longmapsto \underbrace{(x'-x, y'-y, z'-z)}_{\vec{AB}}$$

Chasles ?

$A = (x,y,z)$ $B = (x',y',z')$

$C = (x'', y'', z'')$

$\vec{AC} = (x''-x, y''-y, z''-z)$ = ok

$\vec{AB} + \vec{BC} = (x'-x, y'-y, z'-z) + (x''-x', y''-y', z''-z')$

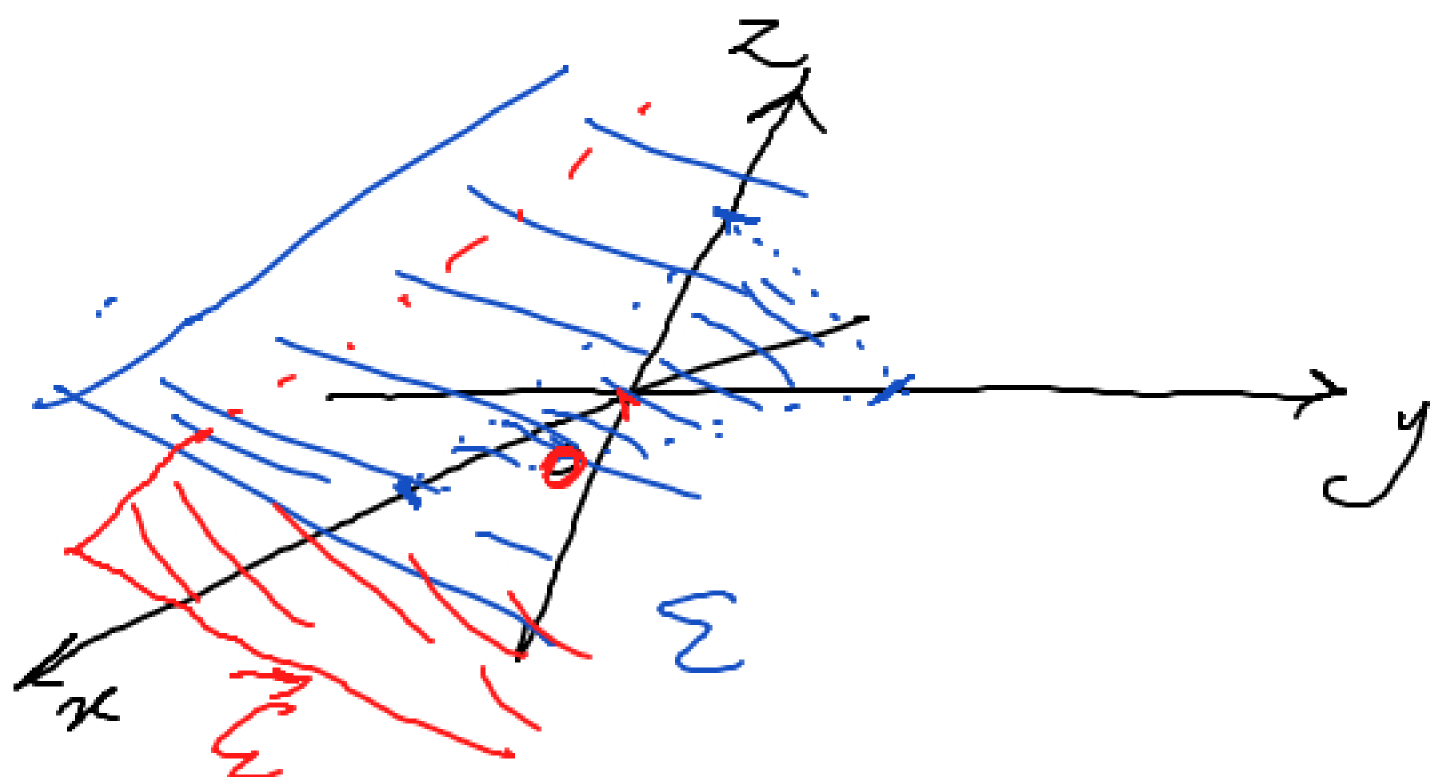
2. On fixe $A=(x_0,y_0,z_0)$ dans $\mathcal{E}$.

On considère $\Phi(A,\cdot) : \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$, $B=(x,y,z) \mapsto (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

C'est une bijection, de réciproque $\vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}$, $(u,v,w) \mapsto (u+x_0, v+y_0, w+z_0)$

Cl : $\mathcal{E}$ est un espace affine, de direction $\vec{\mathcal{E}}$.

$(K=\mathbb{R})$



$(1,0,0) \in \vec{\mathcal{E}}$

$(0,1,0) \in \vec{\mathcal{E}}$

$(0,0,1) \in \vec{\mathcal{E}}$

Généralisations :

$$K^n \qquad \mathcal{E} = \{X \in K^n \mid AX = B\}$$

Solution d'un système linéaire non nécessairement homogène.

$$A \in M_{m,n}(K), \quad B \in K^m$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \{X \in K^n \mid AX = 0\} = \mathrm{Ker}(A)$$

$$\Phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}, \quad (X, Y) \longmapsto Y - X$$

$n = 3$, $m = 1$

$A = (1 \ 1 \ 1)$

$B = 1$.

La condition 2) de la définition correspond au fait bien connu suivant : les solutions de $AX = B$ s'écrivent de manière unique sous la forme

$$X = X_0 + \vec{V}$$

sol. particulière

sol. du système $AX = 0$.

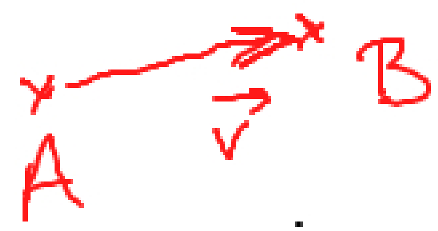
$\mathcal{E}$ espace affine sur un corps K

* La dimension de $\mathcal{E}$ est par déf. la dimension de $\vec{\mathcal{E}}$.

Dans le cours, tous les espaces seront de dimension finie.

* Translation

$\vec v = \vec{AB}$.



$A \in \mathcal{E}$

$\vec v \in \vec{\mathcal{E}}$

Il existe un unique point B tel que $\vec{AB} = \vec v$ (cond. 2)

Ce point est noté $B = A + \vec v$. On dit que c'est le translaté de A par $\vec v$.

L'application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $A \longmapsto A+\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$, notée $t_{\vec{v}}$.

<u>Rq</u>. Le "+" dans $A+\vec{v}$ n'est pas l'addition des vecteurs dans $\vec{\mathcal{E}}$! Ce symbole désigne seulement l'effet du vecteur $\vec{v}$ sur le point A. Ce point de vue est parfois pris comme définition des espaces affines : $\mathcal{E}$ ens. de pts, $\vec{\mathcal{E}}$ espace vectoriel

$\mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$, $(A, \vec{v}) \longmapsto A+\vec{v}$ tq.

(i) $A+\vec{0} = A$

(ii) $(A+\vec{v})+\vec{w} = A+(\vec{v}+\vec{w})$

(iii) pour tout $A \in \mathcal{E}$. $\vec{v} \mapsto A+\vec{v}$ bijection

Proposition — L'ensemble $T(\mathcal{E})$ des translations de $\mathcal{E}$ est un groupe pour la composition

$$\begin{cases} t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}+\vec{w}} \\ t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}} \\ id_{\mathcal{E}} = t_{\vec{0}} \end{cases}$$

L'application $\vec{\mathcal{E}} \to T(\mathcal{E})$, $\vec{v} \mapsto t_{\vec{v}}$ est isomorphisme de groupes

$(\vec{\mathcal{E}}, +)$ $(T(\mathcal{E}), \circ)$

Comparaison espace affine / espace vectoriel

(i) Tout espace vectoriel V sur K est automatiquement et naturellement un espace affine (ex: $V = K^n$)

$$\mathcal{E} = V, \quad \vec{\mathcal{E}} = V, \quad \Phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, \quad (u,v) \longmapsto v - u$$

[exercice : vérifier 1) et 2)]

Vectorialisation de $\mathcal{E}$

(ii) Tout espace affine peut être vu comme un espace vectoriel, de manière non naturelle : on choisit un point $O \in \mathcal{E}$ et on considère la bijection

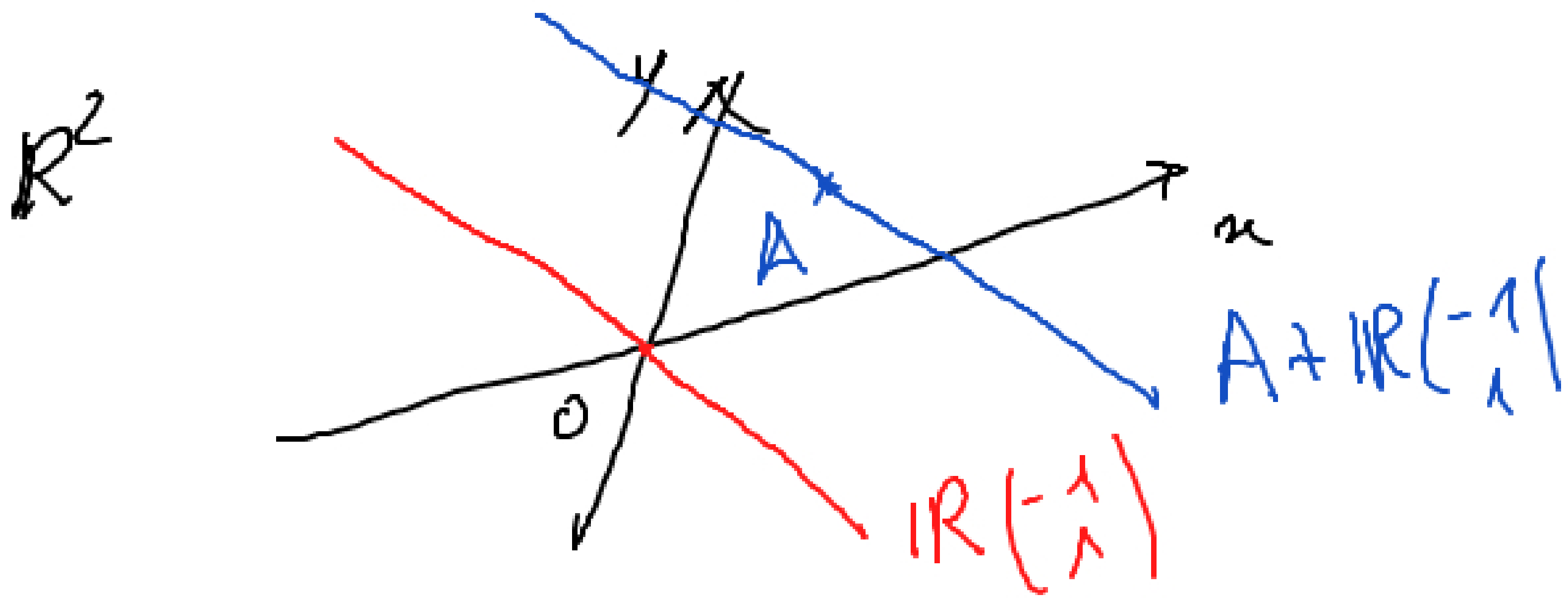
$$\mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, \quad M \longmapsto \overrightarrow{OM}.$$

1.2. Sous-espaces affines

1.2.1. Définition et paramétrage

$\mathcal{E}$ espace affine

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ partie non vide



Def. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si $\mathcal{F}$ est de la forme
$$\mathcal{F} = \{A + \vec{v} \mid \vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}\}$$
avec $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel.

Rq importante : on peut utiliser n'importe quel point de $\mathcal{F}$ pour le définir.

$A, B \in \mathcal{F}$

$$\{A+\vec{v} \mid \vec{v} \in \vec{F}\} = \{B+\vec{w} \mid \vec{w} \in \vec{F}\}$$

$\boxed{\subset}$ $M = A+\vec{v}$, $\vec{v} \in \vec{F}$ $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM} = \underbrace{-\overrightarrow{AB}+\vec{v}}_{\in \vec{F}\,?}$$

Comme $B \in \mathcal{F}$, $B = A+\vec{u}$ avec $\vec{u} \in \vec{F}$

donc $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \in \vec{F}$ et $-\overrightarrow{AB} \in \vec{F}$, d'où $-\overrightarrow{AB}+\vec{v} \in \vec{F}$

$\overrightarrow{BM} \in \vec{F}$, d'où $M = B+\overrightarrow{BM} \in B+\vec{F}$. $\boxed{\supset}$: Idem avec $A \leftrightarrow B$.