Feuille 8

jeudi 15 avril 2021 09:00

Exercice 2 :

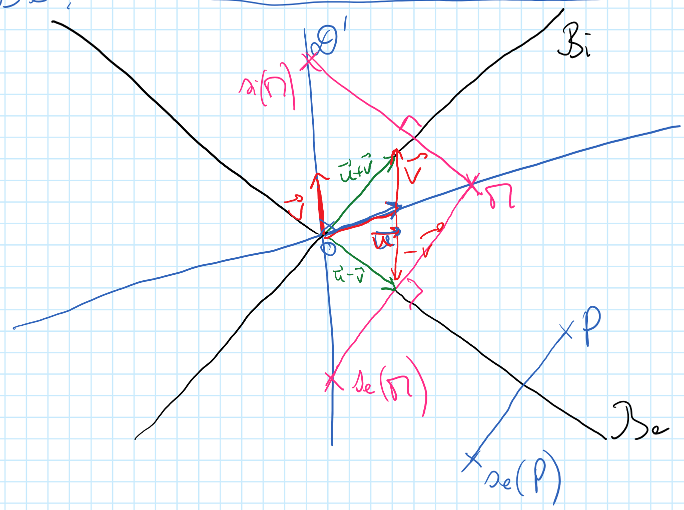
$\mathcal{E}$ plan affine euclidien

O point de $\mathcal{E}$

$\vec{u}, \vec{v}$ unitaires non colinéaires dans $\vec{\mathcal{E}}$.

$\mathcal{B}_i$: droite qui passe par O et dirigée par $\vec{u}+\vec{v}$ (bissectrice intérieure)

$\mathcal{B}_e$: ——— $\vec{u}-\vec{v}$ (bissectrice extérieure)



1) Mq. $\mathcal{B}_i \perp \mathcal{B}_e$.

$\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_e$ se coupent en O. Pour montrer qu'elles sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

On calcule
$$(\vec{u}+\vec{v} \mid \vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - (\vec{u}\mid\vec{v}) + (\vec{v}\mid\vec{u}) - \|\vec{v}\|^2$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

$\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

2) Soit s_i / s_e la réflexion d'axe $\mathcal{B}_i$ / $\mathcal{B}_e$

Mq. s_i et s_e échangent les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

On a déjà $s_i(O) = s_e(O) = O$.

Soit $M \in \mathcal{D}$. Mq. $s_i(M) \in \mathcal{D}'$ et $s_e(M) \in \mathcal{D}'$.

On a
$$M = O + \lambda\vec{u} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$
$$= O + \underbrace{\frac{\lambda}{2}(\vec{u}+\vec{v})}_{\uparrow\ \vec{\mathcal{B}_i}} + \underbrace{\frac{\lambda}{2}(\vec{u}-\vec{v})}_{\uparrow\ \vec{\mathcal{B}_e}}$$

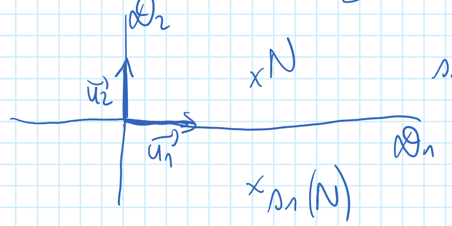
On a vu à la question 1 que $\mathcal{B}_i \perp \mathcal{B}_e$.

Donc s_i / s_e est la réflexion d'axe $\mathcal{B}_i$ / $\mathcal{B}_e$ parallèlement à $\vec{\mathcal{B}_e}$ / $\vec{\mathcal{B}_i}$

D'où
$$s_i(M) = O + \frac{\lambda}{2}(\vec{u}+\vec{v}) - \frac{\lambda}{2}(\vec{u}-\vec{v}) = O + \lambda\vec{v} \in \mathcal{D}'$$
$$s_e(M) = O - \frac{\lambda}{2}(\vec{u}+\vec{v}) + \frac{\lambda}{2}(\vec{u}-\vec{v}) = O - \lambda\vec{v} \in \mathcal{D}'$$

$$s_e(M) = O - \frac{\lambda}{2}(\vec{u}+\vec{v}) + \frac{\lambda}{2}(\vec{u}-\vec{v}) = O - \lambda\vec{v} \in \mathcal{D}'$$

(



s_1 réflexion d'axe $\mathcal{D}_1$:

$$N = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2}$$

$$s_1(N) = x_1\vec{u_1} - x_2\vec{u_2}$$

)

On a bien $s_i(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ et $s_e(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.
On a aussi $s_i^2(\mathcal{D}) = \mathcal{D} = s_i(\mathcal{D}')$ et de même $\mathcal{D} = s_e(\mathcal{D}')$.
Donc s_i et s_e échangent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

3) Mq. s_i échange les demi-droites $O + \mathbb{R}_+\vec{u}$ et $O + \mathbb{R}_+\vec{v}$.

On a vu à la question précédente que si $M = O + \lambda\vec{u}$, alors $s_i(M) = O + \lambda\vec{v}$.

On a $O + \mathbb{R}_+\vec{u} = \{O + \lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}$

$$s_i(O + \mathbb{R}_+\vec{u}) = \{O + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$
$$= O + \mathbb{R}_+\vec{v}$$

Et de même $s_i(O + \mathbb{R}_+\vec{v}) = O + \mathbb{R}_+\vec{u}$. $\square$

4) Mq. $\mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_e$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

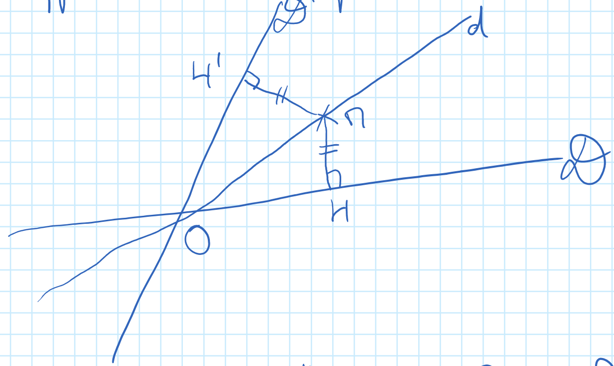
$*$ Soit $M \in \mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_e$. Mq. $d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}')$.

Si $M \in \mathcal{B}_i$, on a, comme s_i est une isométrie (et donc conserve les distances)

$$d(M, \mathcal{D}) = d(s_i(M), s_i(\mathcal{D}))$$
$$= d(M, \mathcal{D}') \quad \text{car } s_i(\mathcal{D}) = \mathcal{D}' \text{ d'après 2).}$$

De même, si $M \in \mathcal{B}_e$, on a $d(M, \mathcal{D}) = d(s_e(M), s_e(\mathcal{D}))$ (car s_e isométrie)
$$= d(M, \mathcal{D}').$$

$*$ Soit M un point de $\mathcal{E}$ équidistant de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Mq. $M \in \mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_e$.
Si $M = O$, alors clairement $O \in \mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_e$.
On suppose maintenant que $M \neq O$.



Soit H / H' le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ / $\mathcal{D}'$

On a $d(M, \mathcal{D}) = MH$, $d(M, \mathcal{D}') = MH'$. Comme ces distances sont égales, on a $MH = MH'$.

Soit d la médiatrice de $[HH']$. On a $\Pi \in d$.

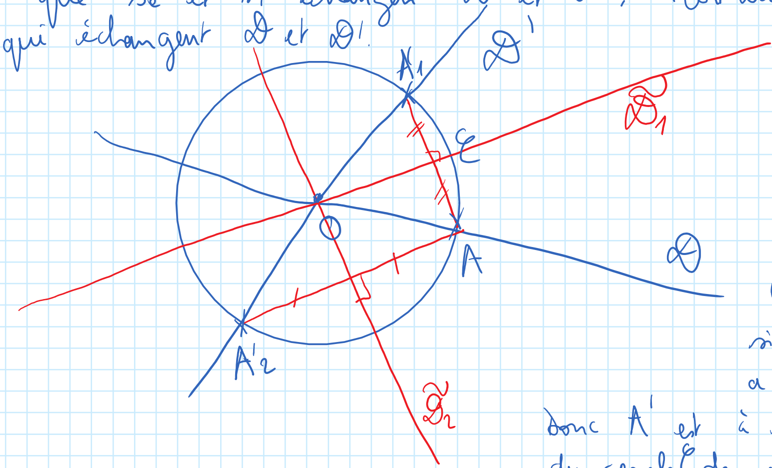
D'autre part, d'après le th. de Pythagore, $OH^2 + H\Pi^2 = O\Pi^2$
$OH'^2 + H'\Pi^2 = O\Pi^2$

$\Rightarrow OH = OH'$ et donc $O \in d$.

Soit s_d la réflexion d'axe d. On a $\begin{cases} s_d(O) = O \\ s_d(H) = H' \end{cases}$ donc $s_d(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

s_d échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

On a vu que s_e et s_i échangent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Montrons que ce sont les seules réflexions qui échangent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



Soit $A \in \mathcal{D}$, $A \neq O$
Soit $\widetilde{\mathcal{D}}$ une droite tq.
$s_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ la réflexion d'axe $\widetilde{\mathcal{D}}$ échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Comme $s_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ est une isométrie, si on note $A' = s_{\widetilde{\mathcal{D}}}(A)$, on a $OA' = OA$.

Donc A' est à l'intersection de $\mathcal{D}'$ et du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA.

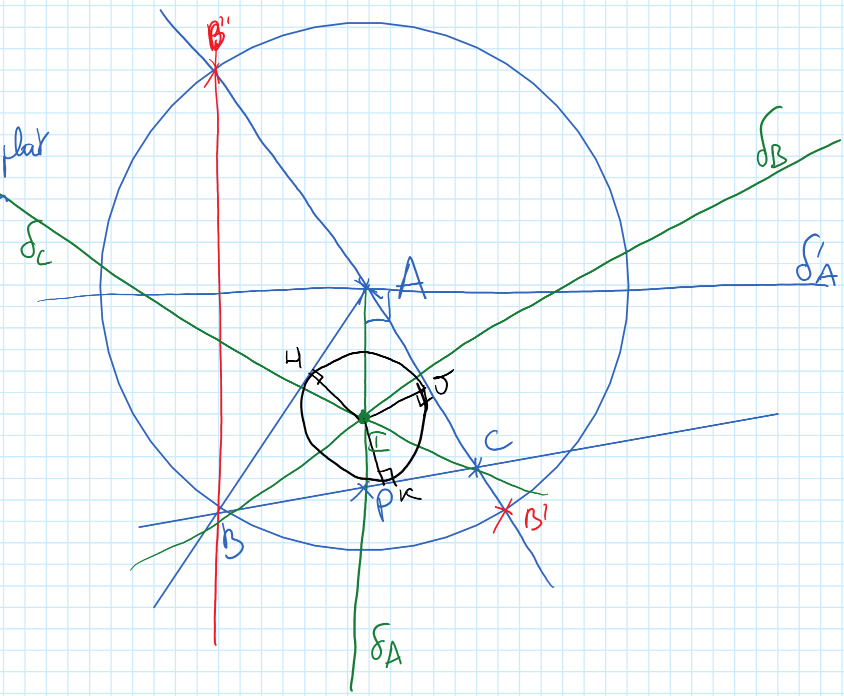
Il y a donc 2 choix pour A' : les deux points d'intersection A_1 et A'_2 entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}'$.
Il y a donc aussi 2 choix pour $\widetilde{\mathcal{D}}$: la médiatrice de AA'_1 et ——— AA'_2.

Il y a donc exactement deux droites telles que les réflexions d'axes ces droites échangent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, ce sont donc $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_e$.

Pour conclure, comme s_d échange $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on a donc $d = \mathcal{B}_i$ ou $d = \mathcal{B}_e$.
Et comme $\Pi \in d$, on a bien $\Pi \in \mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_e$.

Exercice 3 :

triangle ABC non plat
P : point d'intersection de la bissectrice intérieure δ_A de l'angle $\hat{A}$ et du segment $[BC]$.



Mq. $\overline{PB} = -\overline{AB}$. Soient B' et B'' les deux points de (AC) tq.

Mq. $\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = -\dfrac{AB}{AC}$. Soient B' et B'' les deux points de (AC) tq. $AB' = AB'' = AB$. $B' \in [AC)$

Commençons par montrer que $(BB'') \parallel (AP)$.

On a $B' = s_{\delta_A}(B)$ car s_{δ_A} échange $[AB)$ et $[AC)$ d'après 3) exo 2
et $AB = AB'$

Soit δ'_A la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{A}$.
De même, on a $B'' = s_{\delta'_A}(B)$.
Comme d'après 1) exo 2, δ_A est perpendiculaire à δ'_A, alors $(BB'') \perp \delta'_A$
et donc $(BB'') \parallel \delta_A = (AP)$.

D'après le th. de Thalès dans le triangle CBB'', on a

$$\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CP}} = \frac{\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{CA}}.$$

$$\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CP}} + \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{CP}} \qquad\qquad \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CA}} + \frac{\overrightarrow{AB''}}{\overrightarrow{CA}}$$

Donc $\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{CP}} = \dfrac{\overrightarrow{AB''}}{\overrightarrow{CA}} = \dfrac{AB}{AC}$, i.e. $\boxed{\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = -\dfrac{AB}{AC}}$

2) On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
Soit I le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$.

i) Mq. $I = \delta_A \cap \delta_B \cap \delta_C$ où δ_B est la bissectrice intérieure de $\hat{B}$
δ_C ——— $\hat{C}$

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

D'après 1), on a $AC\,\overrightarrow{PB} + AB\,\overrightarrow{PC} = \vec{0}$
i.e. $b\,\overrightarrow{PB} + c\,\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

Donc P est le barycentre de (B, b) et (C, c).
Par associativité du barycentre, I est le barycentre de $(A, a), (P, b+c)$.
(en effet $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
$= a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IP} + \underbrace{b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}}_{=\vec{0}}$)

Donc $I \in (AP) = \delta_A$.
Exactement de la même manière (en étudiant $\hat{B}$ et $\hat{C}$), on trouve aussi que $I \in \delta_B$ et $I \in \delta_C$.
Donc $I \in \delta_A \cap \delta_B \cap \delta_C$ et I est bien le point de concours des trois bissectrices intérieures.

ii) Mq. le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $d(I, (BC)) = IK$ est tangent aux trois côtés du triangle.

Comme K est le projeté orthogonal de I sur (BC), on a $(IK) \perp (BC)$
et donc $\mathcal{E}$ est tangent à (BC) en K.

De plus, $I \in \delta_A$, donc $\underbrace{d(I,(AB))}_{IH} = \underbrace{d(I,(AC))}_{IJ}$

et $I \in \delta_B$, donc $\underbrace{d(I,(AB))}_{IH} = \underbrace{d(I,(BC))}_{IK}$.

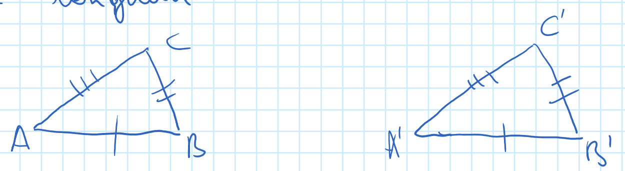
On a bien $IH = IJ = IK$ et $(IJ) \perp (AC)$
$(IH) \perp (AB)$

Donc $\mathcal{E}$ est aussi tangent à (AC) en J et à (AB) en K.

Exercice 4 : 1) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques s'il existe une isométrie f tq. $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$.

Les 3 cas d'isométrie sont les suivants :

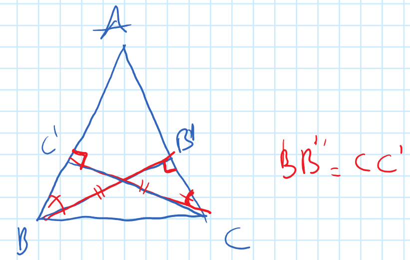
(a) Deux triangles sont isométriques s'ils possèdent trois côtés respectivement de même longueur.



(b) ______ s'ils possèdent un angle de ~~même~~ mesure compris entre deux côtés de même longueur.

(c) ______ s'ils possèdent un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure.

2) ABC triangle
B' projeté orthogonal de B sur (AC)
C' ______ C — (AB)



Mq si $BB' = CC'$, alors ABC isocèle en A.

Mq. ABB' et ACC' sont isométriques.

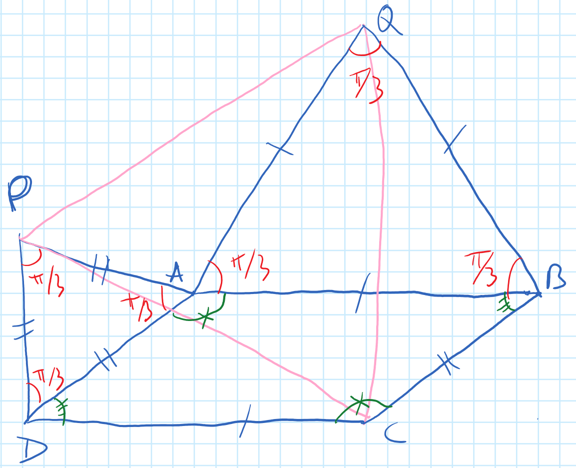
• $\widehat{AC'C} = \widehat{AB'B} = \frac{\pi}{2}$

• $\widehat{B'AB} = \widehat{C'AC}$ et la somme des angles d'un triangle vaut toujours π,
donc on a aussi $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'}$

- $\widehat{B'AB} = \widehat{C'AC}$ et la somme des angles d'un triangle vaut toujours π,
- $BB' = CC'$ donc on a aussi $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'}$.

D'après le critère ©, ABB' et ACC' sont bien isométriques.
On a donc $AB = AC$ et donc ABC isocèle en A.

3) $ABCD$ parallélogramme
ADP, ABQ triangles équilatéraux à l'extérieur de $ABCD$
Mq. PQC équilatéral



Mq. BCQ, DCP, APQ isométriques.

On a $AQ = BQ = DC$
et $AP = BC = PD$

D'après le critère (b), il reste à montrer que $\widehat{PAQ} = \widehat{PDC} = \widehat{QBC}$

On a $\widehat{PDC} = \frac{\pi}{3} + \underbrace{\widehat{ADC}}_{=\widehat{\#}}$

et $\widehat{QBC} = \frac{\pi}{3} + \underbrace{\widehat{ABC}}_{=\widehat{\#}} = \widehat{PDC}$.

On a $\widehat{PAQ} + 2 \times \frac{\pi}{3} + \underbrace{\widehat{DAB}}_{=\widehat{\times}} = 2\pi$

D'autre part, la somme des angles d'un quadrilatère vaut 2π

donc $2 \times \widehat{\times} + 2 \times \widehat{\#} = 2\pi \Rightarrow \widehat{\times} + \widehat{\#} = \pi$

Donc
$$\widehat{PAQ} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} - \widehat{\times}$$
$$= \frac{4\pi}{3} - (\pi - \widehat{\#})$$
$$= \frac{\pi}{3} + \widehat{\#} = \widehat{PDC} = \widehat{QBC}.$$

Donc BCQ, DCP, APQ sont bien isométriques, et en particulier $CQ = CP = PQ$, i.e. PQC équilatéral.