Feuille 7

jeudi 1 avril 2021 08:56

Exercice 1 : Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base d'un e.v. euclidien et $\mathcal{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ la base orthonormée qui se déduit de $\mathcal{B}$ par Gram-Schmidt.

P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Mq. P est triangulaire supérieure à coeff. diagonaux >0.

Rappel : procédé de Gram-Schmidt

$$\boxed{f_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}}$$

$$f_2=\frac{e_2+\lambda f_1}{\|e_2+\lambda f_1\|} \quad \text{avec } \lambda \text{ tq. } (e_2+\lambda f_1 \mid f_1)=0$$

i.e. $(e_2\mid f_1)+\lambda=0$

$$\boxed{f_2=\frac{e_2-(e_2\mid f_1)f_1}{\|e_2-(e_2\mid f_1)f_1\|}}$$

$$f_k=\frac{e_k+\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_{k-1}f_{k-1}}{\|\qquad\|}$$

tq. $(f_k\mid f_1)=0 \Rightarrow \lambda_1=(-e_k\mid f_1)$

$\vdots$

$(f_k\mid f_{k-1})=0 \Rightarrow \lambda_{k-1}=(-e_k\mid f_{k-1})$

$$\boxed{f_k=\frac{e_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_k\mid f_i)f_i}{\|e_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_k\mid f_i)f_i\|} \quad \forall\, 1\le k\le n}.$$

Les colonnes de P sont les coordonnées de $f_1, f_2,\dots,f_n$ dans la base $\mathcal{B}$,

Montrons par récurrence forte que pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, f_k est une combinaison linéaire des vecteurs e_i pour $i\in\{1,\dots,k\}$ et que le coeff. devant e_k est positif.

- $f_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}$ la prop. est vraie.
- On suppose que la prop. est vraie pour tout $k'\in\{1,\dots,k-1\}$ et on la montre pour k.

On a $$f_k=\frac{e_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_k\mid f_i)f_i}{\|e_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_k\mid f_i)f_i\|}.$$

Pour tout $i\in\{1,\dots,k-1\}$, d'après l'hyp. de rec., f_i s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs e_j avec $j\in\{1,\dots,i\}$.

f_k est donc bien une combinaison linéaire de e_j avec $j\in\{1,\dots,k\}$.

De plus, le coefficient de e_k est $\frac{1}{\|\;\;\|}>0$.

f_k est donc bien une combinaison linéaire de e_j avec $j \in \{1,\dots,k\}$.

De plus, le coefficient de e_k est $\dfrac{1}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | f_i) f_i \right\|} > 0$.

Par récurrence P est donc bien une matrice triangulaire supérieure à coeff. diagonaux > 0.

2) Mq. toute famille orthonormée peut se compléter en une base orthonormée.

famille orthonormée : $(v_1, \dots, v_k)$ famille de vecteurs tq.

- $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, $\|v_i\| = 1$
- $\forall i,j \in \{1,\dots,k\}$, $(v_i | v_j) = \delta_{ij}$

Une famille orthonormée est toujours libre :

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tq $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

$\forall i \in \{1,\dots,k\}$, on a $0 = (v_i | 0) = (v_i | \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k)$
$= \lambda_i$

Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ et la famille est libre.

D'après le th. de la base incomplète, on peut compléter $(v_1, \dots, v_k)$ en une base $(v_1, \dots, v_k, v'_{k+1}, \dots, v'_n)$ de notre espace.

En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(v_1, \dots, v_k, v'_{k+1}, \dots, v'_n)$, on obtient une base orthonormée dont les k premiers vecteurs sont $v_1, \dots, v_k$.

Exercice 2 : V e.v. euclidien de dim. finie

Une isométrie de V est un endomorphisme $f : V \to V$ tq.

$\forall u, v \in V$, $(f(u) | f(v)) = (u | v)$.

1) Soit f une isométrie de V. Mq. f est inversible (i.e. f est un automorphisme).

Comme on est en dim. finie, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Soit $u \in \operatorname{Ker} f$. On a $(f(u) | f(u)) = 0$ d'une part (car $u \in \operatorname{Ker} f$)

et $(f(u) | f(u)) = (u | u)$ d'autre part (car f isométrie)

Donc $(u|u) = \|u\|^2 = 0$, et ainsi $u = 0$.

$\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

2) Mq. f endomorphisme de V est une isométrie ssi $\|f(v)\| = \|v\|$ $\forall v \in V$.

$\Rightarrow$) Soit f isométrie. Mq. $\|f(v)\| = \|v\|$ $\forall v \in V$.

$\forall v \in V$, on a $\underbrace{(f(v) | f(v))}_{= \|f(v)\|^2} = \underbrace{(v|v)}_{= \|v\|^2}$

$$\|f(v)\|^2 \qquad \|v\|^2$$

donc $\|f(v)\| = \|v\|$.

$\Leftarrow$) On suppose que $\forall v \in V$, $\|f(v)\| = \|v\|$. Mq. $\forall u,v \in V$, $(f(u)|f(v)) = (u|v)$.

Calculons $\underbrace{\|f(u)+f(v)\|^2}_{=\|f(u+v)\|^2} = (f(u)+f(v) \mid f(u)+f(v))$

$$= \|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 + 2\,(f(u)|f(v))$$

On a donc $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,(f(u)|f(v))$.

Mais d'autre part, on a aussi $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u|v)$.

On en déduit que $(f(u)|f(v)) = (u|v)$.

3) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de V, f endomorphisme de V.

Mq f isométrie ssi $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $(f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j)$.

$\Rightarrow$) Si f isométrie, alors $\forall u,v \in V$, $(f(u)|f(v)) = (u|v)$.
C'est vrai en particulier pour $u = e_i$ et $v = e_j$.

$\Leftarrow$) On suppose que $(f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j)$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$.
Soient $u,v \in V$ quelconques. Mq $(f(u)|f(v)) = (u|v)$.

$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ dans la base $\mathcal{B}$

$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

On a $f(u) = u_1 f(e_1) + \dots + u_n f(e_n)$

$f(v) = v_1 f(e_1) + \dots + v_n f(e_n)$

On calcule
$$(f(u)|f(v)) = (u_1 f(e_1) + \dots + u_n f(e_n) \mid v_1 f(e_1) + \dots + v_n f(e_n))$$
$$= u_1 \sum_{i=1}^n v_i (f(e_1)|f(e_i)) + \dots + u_n \sum_{i=1}^n v_i (f(e_n)|f(e_i))$$
$$= u_1 \sum_{i=1}^n v_i (e_1|e_i) + \dots + u_n \sum_{i=1}^n v_i (e_n|e_i)$$
$$= (u_1 e_1 + \dots + u_n e_n \mid v_1 e_1 + \dots + v_n e_n)$$
$$= (u|v).$$

La matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est

$$S = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \cdots & (e_1|e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n|e_1) & \cdots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix} = \left((e_i|e_j)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

$(x|y) = {}^tXSY$ où $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$

Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

On a $(f(x)|f(y)) = {}^t(AX)S(AY) = {}^tX({}^tASA)Y$

La matrice de $(x,y) \mapsto (f(x)|f(y))$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc ${}^tASA$.

On a $\forall i,j$, $(f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j)$ donc $\forall x,y$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$

et donc $\boxed{{}^tASA = S}$

Dans le cas particulier où $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $S = I_n$.

Donc dans ce cas, $\boxed{{}^tAA = I_n}$

4) Mq. ${}^tAA = I_n$ ssi les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

le coeff. ligne k colonne j de ${}^tAA$ est $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, a_{ji}$

Donc ${}^tAA = I_n \iff \forall k,j \in \{1,\dots,n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, a_{ji} = \delta_{kj}$

$\iff \forall k,j \in \{1,\dots,n\}, (C_k|C_j) = \delta_{kj}$

$\iff (C_1,\dots,C_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

A vérifiant ${}^tAA = I_n$ est appelée une matrice orthogonale.