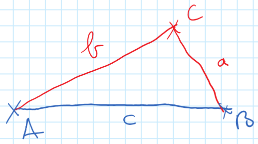
jeudi 25 mars 2021 08:57

Feuille 6 : géométrie euclidienne

Exercice 1 : $\mathcal{E}$ plan affine euclidien, $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$.



Mq : (i) il existe un point $C \in \mathcal{E}$ tel que $AC = b$ et $BC = a$
$\Updownarrow$ (ii) $|a-b| \leq c \leq a+b$

1) Mq (i) $\Rightarrow$ (ii)

rappel : $\|\vec{v}\|^2 = (\vec{v}|\vec{v})$

$$c^2 = \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC} + \vec{CB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 + 2(\vec{AC}|\vec{CB})$$

$|(\vec{AC}|\vec{CB})| \leq \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{CB}\|$ Cauchy-Schwarz

On a donc $\underbrace{\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 - 2\|\vec{AC}\|\|\vec{CB}\|}_{} \leq c^2 \leq \underbrace{\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 + 2\|\vec{AC}\|\|\vec{CB}\|}_{}$

$= (\|\vec{AC}\| - \|\vec{CB}\|)^2$ $\qquad$ $= (\|\vec{AC}\| + \|\vec{CB}\|)^2$

$= (b-a)^2$ $\qquad$ $= (a+b)^2$

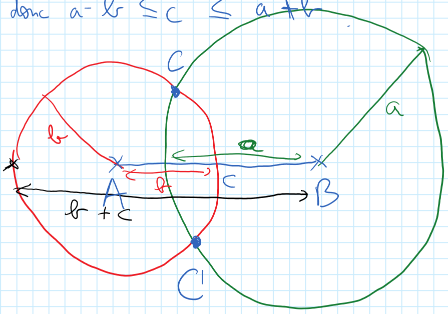
On obtient $(b-a)^2 \leq c^2 \leq (a+b)^2$

On prend la racine carrée : $|a-b| \leq c \leq a+b$

2) On suppose (ii) est vérifiée : $|a-b| \leq c \leq a+b$.
Quels sont les points C qui satisfont la condition (i) ? $AC = b$, $BC = a$

On suppose sans perte de généralité que $a > b$.

On a donc $a-b \leq c \leq a+b$

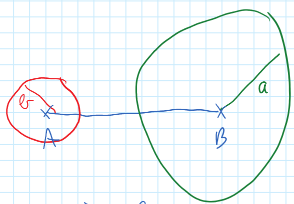


L'ensemble des points C tq. $AC = b$ est le cercle de centre A et de rayon b

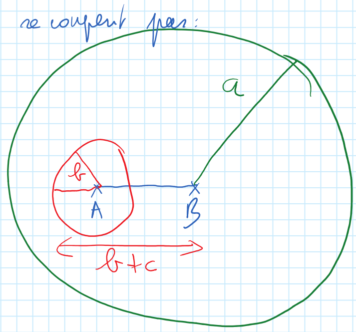
Si les deux cercles se coupent, on a bien C et C' qui satisfont la condition (i).

$c \leq a+b$ et $b+c \geq a$ ($\Leftrightarrow a-b \leq c$), i.e. (ii) est vérifiée

Il y a deux cas où les cercles ne se coupent pas :



Cas $c > b+a$



Cas $a-b > c$
$(b+c < a)$

3) Donc si (ii) est vérifiée, on trace les cercles :
$\mathcal{C}_A$ centré en A de rayon b
et $\mathcal{C}_B$ ——— B ——— a

et on choisit pour C l'un des deux points d'intersections de $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$
(il existe d'après 2))
C est t.q. $AC = b$ et $BC = a$.
Donc (i) est vérifiée.

(il existe d'après 4))
C est t.q. $AC = b$ et $BC = a$.
Donc (i) est vérifiée.

On a bien montré (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

4) Le triangle ABC est plat ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires,
i.e. ssi $(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{CB}) = \|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{CB}\|$ ou $-\|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{CB}\|$

ssi $c^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{CB})$

$= \underbrace{\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2}_{} + 2\|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{CB}\| = (a+b)^2$

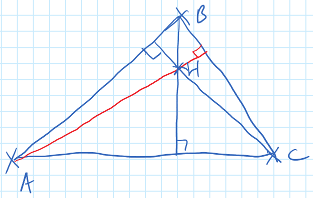
ou $\quad -2\|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{CB}\| = (a-b)^2$

ssi $c = a+b$ ou $|a-b|$

ABC est plat ssi on a une égalité dans la cond. (ii)
ABC non plat ssi les inégalités sont strictes : $|a-b| < c < a+b$.

2) A, B, C, D points d'un espace affine euclidien.
Mq : $S := (\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}) = 0 \qquad (*)$
D'après Chasles,
$S = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{BC})$
$= \cancel{(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{CD})} + \cancel{(\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CD})} + \cancel{(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{DC})} + \cancel{(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{CB})} + \cancel{(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{BC})} + \cancel{(\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{BC})}$
$= 0$

i) Mq. les 3 hauteurs d'un triangle non plat sont concourantes.

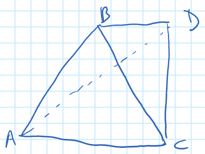


Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C
(les deux hauteurs se coupent bien car le triangle est non plat)
On a $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CH}) = 0$ car $(AB) \perp (CH)$
$(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{HB}) = 0$ car $(AC) \perp (HB)$

D'après $(*)$ avec $D = H$, on a
$\underbrace{(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CH})}_{=0} + \underbrace{(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{HB})}_{=0} + (\overrightarrow{AH} \mid \overrightarrow{BC}) = 0$

Donc $(\overrightarrow{AH} \mid \overrightarrow{BC}) = 0$ donc $(AH) \perp (BC)$ et
donc H appartient à la hauteur issue de A.

ii) Mq. si un tétraèdre possède deux couples d'arêtes opposées orthogonales, alors il en est de même pour le 3e couple.



On suppose que $(AB) \perp (CD)$ et $(AC) \perp (BD)$.
On va montrer que $(AD) \perp (BC)$.
On a $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD}) = 0$ et $(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{DB}) = 0$
D'après $(*)$, $\underbrace{(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD})}_{0} + \underbrace{(\overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{DB})}_{0} + (\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BC}) = 0$

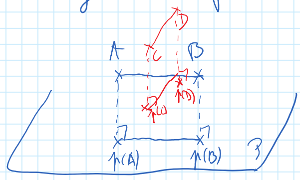
Donc $(\overrightarrow{AD}|\overrightarrow{BC}) = 0$, et donc $(AD) \perp (BC)$.

Exercice 3: $\mathcal{P}$ plan dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dim. 3.
p : projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

A, B, C, D dans $\mathcal{E}$ tq. $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}) = 0$.

Mq $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ orthogonal à $\overrightarrow{p(C)p(D)}$ ssi $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou $\overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

$\Leftarrow$) On suppose sans perte de généralité que $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$



Comme $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, on a $\vec{p}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{AB}$.

On $0 = (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{p(A)p(B)}|\overrightarrow{CD})$

$$= (\overrightarrow{p(A)p(B)} \,|\, \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(C)p(D)} + \overrightarrow{p(D)D})$$

par définition d'un proj orthogonale, $\overrightarrow{Cp(C)}$ et $\overrightarrow{p(D)D}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. En particulier, leur produit scalaire avec n'importe quel vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est nul.

Donc $(\overrightarrow{p(A)p(B)} \,|\, \overrightarrow{Cp(C)}) = 0$

$(\overrightarrow{p(A)p(B)} \,|\, \overrightarrow{p(D)D}) = 0$

Donc $0 = (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{p(A)p(B)} \,|\, \overrightarrow{p(C)p(D)})$

et donc $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ et $\overrightarrow{p(C)p(D)}$ sont bien orthogonaux.

$\Rightarrow$) On suppose maintenant que $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ et $\overrightarrow{p(C)p(D)}$ sont orthogonaux et on montre que $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou $\overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On a $(\overrightarrow{p(A)p(B)} \,|\, \overrightarrow{p(C)p(D)}) = 0$.

Calculons $0 = (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD})$

$$= (\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)B} \,|\, \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(C)p(D)} + \overrightarrow{p(D)D})$$

$$= (\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B} \,|\, \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D})$$

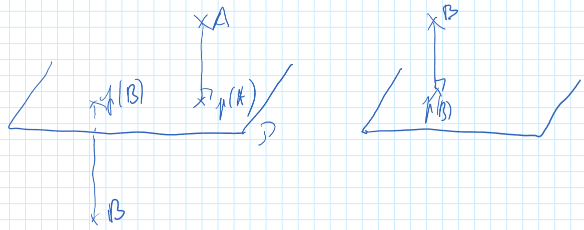
$$+ \underbrace{(\overrightarrow{p(A)p(B)} \,|\, \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D})}_{0}$$ car $\overrightarrow{Cp(C)}$ et $\overrightarrow{p(D)D}$ orthogonaux à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

$$+ \underbrace{(\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B} \,|\, \overrightarrow{p(C)p(D)})}_{0}$$

$$+ \underbrace{(\overrightarrow{p(A)p(B)} \,|\, \overrightarrow{p(C)p(D)})}_{0}$$

Il nous reste donc $(\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B} \,|\, \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D}) = 0$.

Comme on est en dimension 3, tous les vecteurs $\overrightarrow{Ap(A)}$, $\overrightarrow{p(B)B}$, $\overrightarrow{Cp(C)}$ et $\overrightarrow{p(D)D}$ ont la même direction.



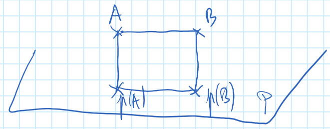
Comme $\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B}$ et $\overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D}$ sont dans la même direction, on a

$$0 = (\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B} \,|\, \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D}) = \pm \|\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B}\| \times \|\overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D}\|$$

On a donc $\|\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B}\| = 0$ ou $\|\overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D}\| = 0$

i.e. $\overrightarrow{Ap(A)} = \overrightarrow{Bp(B)}$ ou $\overrightarrow{Cp(C)} = \overrightarrow{Dp(D)}$

i.e. $\overrightarrow{AB} \in \vec{P}$ ou $\overrightarrow{CD} \in \vec{P}$

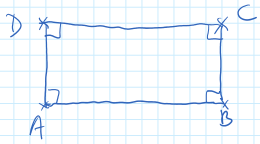


Exercice 4 : $ABCD$ un quadrilatère dans $\mathcal{E}$ espace affine euclidien.

On suppose que $(AB) \perp (BC)$, $(BC) \perp (CD)$, $(CD) \perp (DA)$, $(DA) \perp (AB)$.

Mq. A, B, C, D coplanaires.

* Preuve avec un repère



On considère le repère orthonormé $\left(A, \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|}, \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\|AB\|}, \vec{v}\right)$

où $\vec{v}$ est un vecteur de norme 1 orthogonal au plan (ABD).

Notons (x, y, z) les coordonnées de C dans ce repère.

On a $(BC) \perp (AB)$, donc $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AB}) = 0$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x - AB, y, z)$

$\overrightarrow{AB}$ ——— $(AB, 0, 0)$

$0 = (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AB}) = (x - AB)\, AB \Rightarrow x - AB = 0$ (car $AB \neq 0$)

$\boxed{x = AB}$

On a $(DC) \perp (AD)$, donc $(\overrightarrow{DC} \mid \overrightarrow{AD}) = 0$

$\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(x, y - AD, z)$

$\overrightarrow{AD}$ ——— $(0, AD, 0)$

$0 = (\overrightarrow{DC} \mid \overrightarrow{AD}) = (y - AD)\, AD \Rightarrow \boxed{y = AD}$ (car $AD \neq 0$)

On a $(BC) \perp (DC)$ donc $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{DC}) = 0$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x - AB, y, z) = (0, AD, z)$

$\overrightarrow{DC}$ ——— $(x, y - AD, z) = (AB, 0, z)$

$0 = (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{DC}) = z^2 \Rightarrow z = 0$ et donc C est dans le plan (ABD).

* preuve en utilisant l'exercice 3 :

Soit P le plan (ABD) et p la projection orthogonale sur P.

On veut montrer que $p(C) = C$.

On a $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC}) = 0$ et $\overrightarrow{AB} \in \vec{P}$ donc d'après l'exo 3,

$(\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{p(B)p(C)}) = 0$, i.e. $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{Bp(C)}) = 0$ (1)

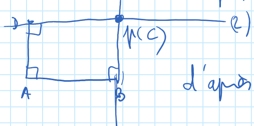
On a $(\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{CD}) = 0$ et $\overrightarrow{AD} \in \vec{P}$, donc d'après l'exo 3,

$(\overrightarrow{p(A)p(D)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)}) = 0$, i.e. $(\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{p(C)D}) = 0$ (2).

On calcule $(\overrightarrow{p(B)p(C)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)}) = (\overrightarrow{Bp(C)} \mid \overrightarrow{p(C)D})$

(1) On a $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD}) = 0$ car $(AB) \perp (AD)$

et d'après (1), $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{Bp(C)}) = 0$ et donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{Bp(C)}$ sont colinéaires (car ils appartiennent tous deux à $\vec{P}$)

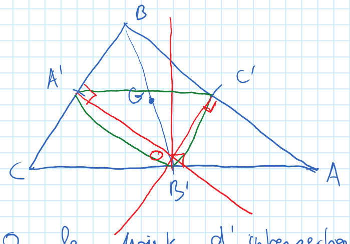


d'après (2), $(\overrightarrow{p(C)D} \mid \overrightarrow{AD}) = 0$ et donc $\overrightarrow{p(C)D}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc $(\overrightarrow{Bp(C)} \mid \overrightarrow{p(C)D}) = 0$ car $\overrightarrow{Bp(C)}$ et $\overrightarrow{p(C)D}$ sont orthogonaux, tout comme $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

On a donc $\left(\overrightarrow{p(B)p(C)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)}\right) = 0$, et d'après l'exo 3,
on a $\overrightarrow{BC} \in \vec{P}$ ou $\overrightarrow{DC} \in \vec{P}$ donc $C \in P$.
(car B et $D \in P$)

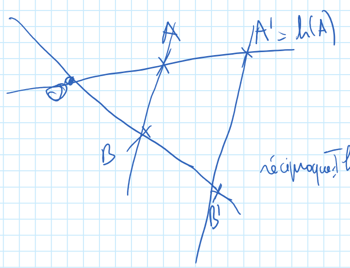
Exercice 5 : ABC triangle non plat dans un plan affine euclidien
A' milieu de $[BC]$
B' ——— $[AC]$
C' ——— $[AB]$
G centre de gravité de ABC.



1) Soit O le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$.
$OA = OB$ car $O \in m_{AB}$:= médiatrice de $[AB]$
$OA = OC$ car $O \in m_{AC}$:= médiatrice de $[AC]$
Donc on a aussi $OB = OC$, ce qui veut dire que $O \in m_{BC}$ la médiatrice de $[BC]$.
Les trois médiatrices sont bien concourantes en O.
O est à la même distance de A, B et C, donc le cercle de centre O et de rayon $OA = OB = OC$ passe bien par les trois sommets A, B et C. C'est le cercle circonscrit.
Réciproquement, tout cercle $\mathcal{C}'$ passant par A, B, C et centré en un point O' tq. $O'A = O'B = O'C$ satisfait : O' est à l'intersection des médiatrices, donc $O' = O$
Donc on a bien $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ car les deux cercles ont le même centre et le même rayon

2) G centre de gravité de A, B, C donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$
$= \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'}$ car A' milieu de $[BC]$.
Donc $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$
Soit h l'homothétie de centre G et rapport $-\frac{1}{2}$. On a $h(A) = A'$.
On a aussi $\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB'} = 0$ et $\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GC'} = 0$
donc $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.
Donc h transforme ABC en $A'B'C'$.
h est une application affine, elle préserve donc les barycentres.
Donc l'isobarycentre de $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$ est $h(G)$, l'image de l'isobarycentre G de A, B, C par h.

3) $(A'B') \parallel (AB)$ car les homothéties envoient toujours une droite sur une droite parallèle à celle-ci.
dem : h homothétie de centre O rapport k



$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$
réciproque Thalès $\Rightarrow (AB) \parallel (A'B')$

On a $m_{AB} \perp (AB)$ par déf. de la médiatrice
et comme $(AB) \parallel (A'B')$, alors $m_{AB} \perp (A'B')$
De plus, $C' \in m_{AB}$ car c'est le milieu de $[AB]$.
Donc $m_{AB} \perp (A'B')$ et passe par C', c'est la hauteur de $A'B'C'$ issue de C'.
Idem pour B' et A' : m_{BC} est donc ——— A'

De plus, $C' \in m_{AB}$ car c'est le milieu de $[AB]$.

Donc $m_{AB} \perp (A'B')$ et passe par C', c'est la hauteur de $A'B'C'$ issue de C'.

Idem pour B' et A' : m_{BC} est donc ——— A'

m_{AC} ——— B'

4) Mq. les hauteurs de ABC sont sécantes en $H = h^{-1}(O)$.

Les homothéties préservent l'orthogonalité. Comme la médiatrice m_{AB} de AB est perpendiculaire à $(A'B')$ et passe par C', alors $h^{-1}(m_{AB})$ est perpendiculaire à $(h^{-1}(A')h^{-1}(B')) = (AB)$ et passe par $h^{-1}(C') = C$.

Donc $h^{-1}(m_{AB})$ est la hauteur issue de C dans ABC.

De même $h^{-1}(m_{AC})$ ——— B ———

$h^{-1}(m_{BC})$ ——— A ———

On a vu en 1) que m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} étaient concourantes en O.

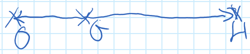
Donc $h^{-1}(m_{AB})$, $h^{-1}(m_{AC})$ et $h^{-1}(m_{BC})$ sont concourantes en $h^{-1}(O) = H$.

5) Montrons que H, G et O sont alignés.

On vient de voir que $h^{-1}(O) = H$ donc $O = h(H)$

$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

Donc O, G et H sont bien alignés.



Exercice 6 : $\mathcal{E}$ espace affine euclidien.

Points pondérés $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$

$f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ fonction scalaire de Leibniz

$M \mapsto \sum_{i=1}^{n} m_i MA_i^2$

lignes de niveau de f : $\mathcal{L}_s = \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = s\}$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

1) • Supposons $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$, Mq $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}$ ne dépend pas de O.

$\forall O \in \mathcal{E}$, on note $\vec{u_O} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}$.

Soient O et O' deux points quelconques de $\mathcal{E}$. Mq. $\vec{u_O} = \vec{u_{O'}}$.

On a $\vec{u_O} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_i})$ d'après Chasles

$= \overrightarrow{OO'} \sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{O'A_i}$

$= \vec{0} + \vec{u_{O'}}$

$\vec{u}$ ne dépend donc effectivement pas de O.

• Mq. $f(M) = f(O) - 2(\overrightarrow{OM} \mid \vec{u})$ pour tous $O, M \in \mathcal{E}$.

On a $f(M) = \sum_{i=1}^{n} m_i MA_i^2$

$= \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{MA_i} \mid \overrightarrow{MA_i})$

$= \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i} \mid \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})$ d'après Chasles

$= MO^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i OA_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{OA_i})$

$= 0 + f(O) + 2 \left(\overrightarrow{MO} \mid \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}}_{\vec{u}}\right)$

$= f(O) - 2(\overrightarrow{OM} \mid \vec{u})$

• En déduire les lignes de niveau de f.

D'après le point précédent, on a $f(M) = f(O)$ ssi $(\overrightarrow{OM} \mid \vec{u}) = 0$

i.e. ssi $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\vec{u}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

* si $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$, $O = M$ (cas trivial)

* si $\vec{u} = \vec{0}$, on aura $(\vec{OM} | \vec{u}) = 0$ pour tous O et $M \in \mathcal{E}$
et donc $f(O) = f(M)$ pour tous $O, M \in \mathcal{E}$.
Dans ce cas f est constante et on a une seule ligne de niveau qui est $\mathcal{E}$.
* si $\vec{u} \neq \vec{0}$, notons $f(O) = s$. $\mathcal{L}_s$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tq. $\vec{OM}$ est orthogonal à $\vec{u}$, c'est à dire l'hyperplan passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$.

2) Supposons $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$. Soit G le barycentre de $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$.

• Calculons $f(M) - f(G)$. $\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA_i} = \vec{0}$

On a
$$
\begin{aligned}
f(M) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{MA_i} | \vec{MA_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{MG} + \vec{GA_i} | \vec{MG} + \vec{GA_i}) \\
&= MG^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i GA_i^2 + 2\left(\vec{MG} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{GA_i}\right) \\
&= MG^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + f(G) + 0
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{f(M) - f(G) = MG^2 \sum_{i=1}^{n} m_i}$

Calculons les lignes de niveau de f.

On a $f(M) = s$ ssi $MG^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + f(G) = s$

ssi $MG^2 = \underbrace{\dfrac{s - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}_{= \rho_s}$ $\qquad$ (division OK car $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$)

* si $\rho_s < 0$, on ne peut pas avoir $MG^2 = \rho_s$ donc $\mathcal{L}_s = \emptyset$
* si $\rho_s = 0$, $\mathcal{L}_s = \{G\}$
* si $\rho_s > 0$, $MG = \sqrt{\rho}$, $\mathcal{L}_s$ est l'ensemble des points M à distance $\sqrt{\rho_s}$ de G, c'est à dire le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\rho_s}$.

3) ABC triangle non plat.
Déterminons α, β, γ tq. $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E} \mid \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 1\}$ soit le cercle circonscrit à ABC.
Cet ensemble $\mathcal{C}$ est la ligne de niveau 1.
On veut que $\mathcal{C}$ passe par A, B et C donc :
$$
\begin{cases}
0 + \beta AB^2 + \gamma AC^2 = 1 & \text{car } A \in \mathcal{C} \\
\alpha AB^2 + 0 + \gamma BC^2 = 1 & \text{car } B \in \mathcal{C} \\
\alpha AC^2 + \beta BC^2 + 0 = 1 & \text{car } C \in \mathcal{C}
\end{cases}
$$

<u>Rappel</u> : formules de Cramer :
$$
\begin{cases}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3
\end{cases}
$$

Ce système a une unique solution si $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

et dans ce cas les solutions sont
$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad
x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad
x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta}
$$

Dans notre cas,
$$
\begin{aligned}
\Delta = \begin{vmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 \\ AB^2 & 0 & BC^2 \\ AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}
&= -AB^2 \begin{vmatrix} AB^2 & AC^2 \\ BC^2 & 0 \end{vmatrix} + AC^2 \begin{vmatrix} AB^2 & AC^2 \\ 0 & BC^2 \end{vmatrix} \\
&= +AB^2 BC^2 AC^2 + AC^2 AB^2 BC^2 \\
&= 2 AB^2 BC^2 AC^2
\end{aligned}
$$

$\neq 0$ car ABC triangle non plat.

On a bien une unique solution :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & 0 & BC^2 \\ 1 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{AC^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & BC^2 \end{vmatrix} - BC^2 \begin{vmatrix} 1 & AB^2 \\ 1 & BC^2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$= \frac{AC^2 BC^2 - BC^4 + BC^2 AB^2}{\Delta}$$

$$= \frac{AC^2 - BC^2 + AB^2}{2 AB^2 AC^2}$$

De même $\beta = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB^2 BC^2}$ et $\gamma = \dfrac{-AB^2 + BC^2 + AC^2}{2 AC^2 BC^2}$.

On a trouvé des α, β, γ t.q. notre ligne de niveau $\mathcal{E}$ passe par A, B et C.
Vérifions que $\mathcal{E}$ est bien un cercle.
D'après les questions précédentes, $\mathcal{E}$ est soit un cercle soit le plan entier car il contient trois point non alignés.
Si $\mathcal{E}$ était égal à tout le plan, on serait dans le cas de la question 1) et il faudrait donc que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\vec{u} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC} = \vec{0}$ $\forall O \in \mathcal{E}$.

Pour $O = A$, on aurait $\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC} = 0$
$O = B$ $\quad \alpha \vec{BA} + \gamma \vec{BC} = 0$
$O = C$ $\quad \alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB} = 0$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui contredirait la définition de la ligne de niveau car on aurait $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 1$
i.e. $0 = 1$ contradiction.

D'après la question 2), le centre du cercle $\mathcal{E}$ est G, le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.
Il a donc pour coordonnées barycentriques $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \right)$.