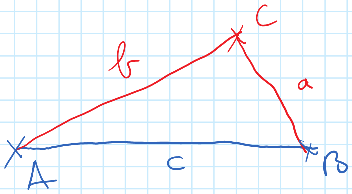
jeudi 25 mars 2021 08:57

Feuille 6 : géométrie euclidienne

Exercice 1 : $\mathcal{E}$ plan affine euclidien, $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$.



Mq : (i) il existe un point $C \in \mathcal{E}$ tel que $AC = b$ et $BC = a$
$\Updownarrow$ (ii) $|a-b| \leq c \leq a+b$

1) Mq (i) $\Rightarrow$ (ii)

rappel : $\|\vec{v}\|^2 = (\vec{v}|\vec{v})$

$$c^2 = \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}+\vec{CB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 + 2(\vec{AC}|\vec{CB})$$

$|(\vec{AC}|\vec{CB})| \leq \|\vec{AC}\|.\|\vec{CB}\|$ Cauchy-Schwarz

On a donc $\underbrace{\|\vec{AC}\|^2+\|\vec{CB}\|^2-2\|\vec{AC}\|\|\vec{CB}\|}_{} \leq c^2 \leq \underbrace{\|\vec{AC}\|^2+\|\vec{CB}\|^2+2\|\vec{AC}\|\|\vec{CB}\|}_{}$

$= (\|\vec{AC}\|-\|\vec{CB}\|)^2$ $\qquad$ $= (\|\vec{AC}\|+\|\vec{CB}\|)^2$

$= (b-a)^2$ $\qquad$ $= (a+b)^2$

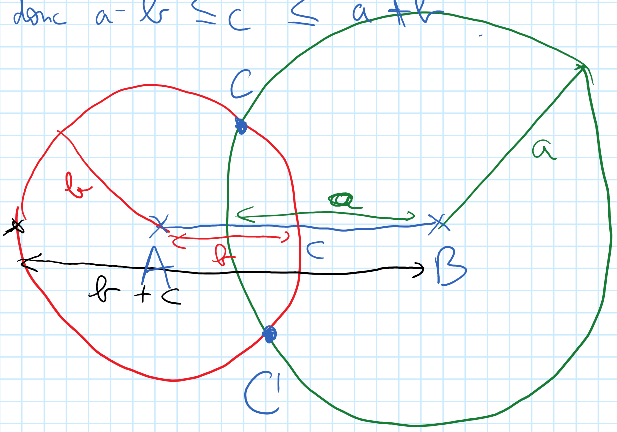
On obtient $(b-a)^2 \leq c^2 \leq (a+b)^2$

On prend la racine carrée : $|a-b| \leq c \leq a+b$

2) On suppose (ii) est vérifiée : $|a-b| \leq c \leq a+b$.
Quels sont les points C qui satisfont la condition (i) ? $AC = b$, $BC = a$

On suppose sans perte de généralité que $a > b$.

On a donc $a-b \leq c \leq a+b$

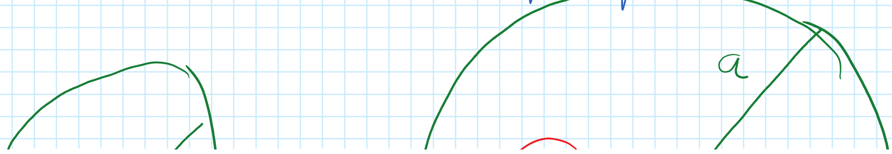


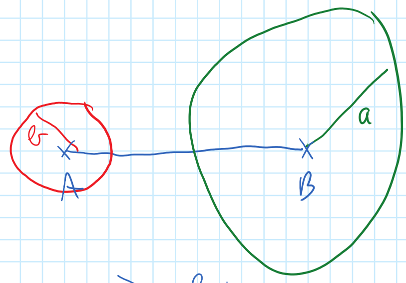
L'ensemble des points C tq. $AC = b$ est le cercle de centre A et de rayon b

Si les deux cercles se coupent, on a bien C et C' qui satisfont la condition (i).

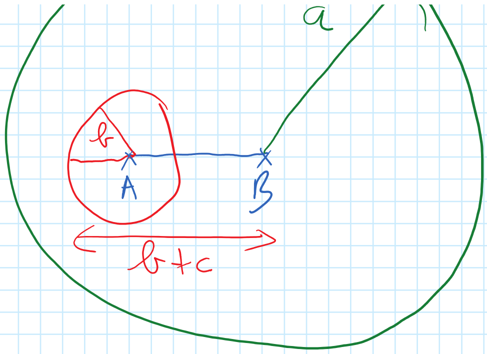
$c \leq a+b$ et $b+c \geq a$ ($\Leftrightarrow a-b \leq c$), i.e. (ii) est vérifiée

Il y a deux cas où les cercles ne se coupent pas :





Cas $c > b+a$



Cas $a-b > c$
$(b+c < a)$

3) Donc si (ii) est vérifiée, on trace les cercles :
$\mathcal{C}_A$ centré en A de rayon b
et $\mathcal{C}_B$ —— B —— a
et on choisit pour C l'un des deux points d'intersection de $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$
(il existe d'après 2))
C est t.q. $AC = b$ et $BC = a$.
Donc (i) est vérifiée.
On a bien montré (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

4) Le triangle ABC est plat ssi $\vec{AC}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires,
i.e. ssi $(\vec{AC} \mid \vec{CB}) = \|\vec{AC}\| \, \|\vec{CB}\|$ ou $-\|\vec{AC}\| \, \|\vec{CB}\|$

ssi $$c^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2(\vec{AC} \mid \vec{CB})$$
$$= \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2\|\vec{AC}\| \, \|\vec{CB}\| = (a+b)^2$$
ou $$\underline{\qquad\qquad} - 2\|\vec{AC}\| \, \|\vec{CB}\| = (a-b)^2$$

ssi $c = a+b$ ou $|a-b|$

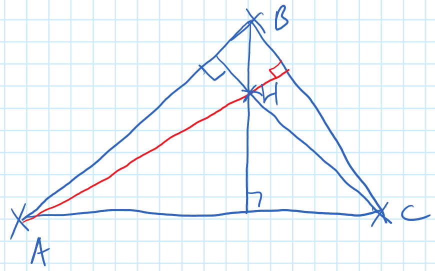
ABC est plat ssi on a une égalité dans la cond. (ii)
ABC non plat ssi les inégalités sont strictes : $|a-b| < c < a+b$.

2) A, B, C, D points d'un espace affine euclidien.
Mq : $S := (\vec{AB} \mid \vec{CD}) + (\vec{AC} \mid \vec{DB}) + (\vec{AD} \mid \vec{BC}) = 0 \qquad (*)$
D'après Chasles,
$$S = (\vec{AC} + \vec{CB} \mid \vec{CD}) + (\vec{AC} \mid \vec{DC} + \vec{CB}) + (\vec{AC} + \vec{CD} \mid \vec{BC})$$
$$= \cancel{(\vec{AC} \mid \vec{CD})} + \cancel{(\vec{CB} \mid \vec{CD})} + \cancel{(\vec{AC} \mid \vec{DC})} + \cancel{(\vec{AC} \mid \vec{CB})} + \cancel{(\vec{AC} \mid \vec{BC})} + \cancel{(\vec{CD} \mid \vec{BC})}$$
$$= 0$$

i) Mq. les 3 hauteurs d'un triangle non plat sont concourantes.

B

i) Mq. les 3 hauteurs d'un triangle non plat sont concourantes.



Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C (les deux hauteurs se coupent bien car le triangle est non plat)

On a $(\vec{AB} \mid \vec{CH}) = 0$ car $(AB) \perp (CH)$

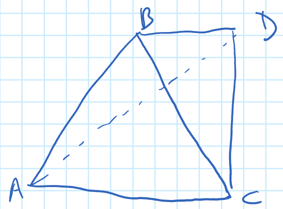
$(\vec{AC} \mid \vec{HB}) = 0$ car $(AC) \perp (HB)$

D'après $(*)$ avec $D = H$, on a

$$\underbrace{(\vec{AB} \mid \vec{CH})}_{=0} + \underbrace{(\vec{AC} \mid \vec{HB})}_{=0} + (\vec{AH} \mid \vec{BC}) = 0$$

Donc $(\vec{AH} \perp \vec{BC}) = 0$ donc $(AH) \perp (BC)$ et donc H appartient à la hauteur issue de A.

ii) Mq. si un tétraèdre possède deux couples d'arêtes opposées orthogonales, alors il en est de même pour le 3e couple.



On suppose que $(AB) \perp (CD)$ et $(AC) \perp (BD)$.

On va montrer que $(AD) \perp (BC)$.

On a $(\vec{AB} \mid \vec{CD}) = 0$ et $(\vec{AC} \mid \vec{DB}) = 0$

D'après $(*)$, $\underbrace{(\vec{AB} \mid \vec{CD})}_{0} + \underbrace{(\vec{AC} \mid \vec{DB})}_{0} + (\vec{AD} \mid \vec{BC}) = 0$

Donc $(\vec{AD} \mid \vec{BC}) = 0$, et donc $(AD) \perp (BC)$.

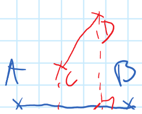
<u>Exercice 3:</u> $\mathcal{P}$ plan dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dim. 3.

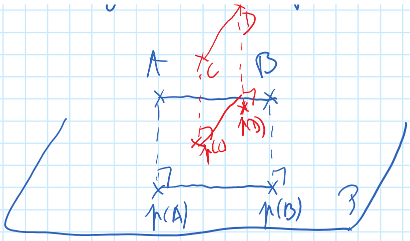
p : projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

A, B, C, D dans $\mathcal{E}$ tq. $(\vec{AB} \mid \vec{CD}) = 0$.

Mq $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ orthogonal à $\overrightarrow{p(C)p(D)}$ ssi $\vec{AB} \in \vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{CD} \in \vec{\mathcal{P}}$.

$\Leftarrow$) On suppose sans perte de généralité que $\vec{AB} \in \vec{\mathcal{P}}$





Comme $\vec{AB} \in \vec{P}$, on a $\vec{p}(\vec{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)} = \vec{AB}$.

On $0 = (\vec{AB} \mid \vec{CD}) = (\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \vec{CD})$

$$= (\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(C)p(D)} + \overrightarrow{p(D)D})$$

par définition d'un proj orthogonale, $\overrightarrow{Cp(C)}$ et $\overrightarrow{p(D)D}$ sont orthogonaux à $\vec{P}$. En particulier, leur produit scalaire avec n'importe quel vecteur de $\vec{P}$ est nul.

Donc $(\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{Cp(C)}) = 0$

$(\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{p(D)D}) = 0$

Donc $0 = (\vec{AB} \mid \vec{CD}) = (\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)})$

et donc $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ et $\overrightarrow{p(C)p(D)}$ sont bien orthogonaux.

$\Rightarrow$) On suppose maintenant que $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ et $\overrightarrow{p(C)p(D)}$ sont orthogonaux et on montre que $\vec{AB} \in \vec{P}$ ou $\vec{CD} \in \vec{P}$.

On a $(\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)}) = 0$.

Calculons $0 = (\vec{AB} \mid \vec{CD})$

$$= (\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)B} \mid \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(C)p(D)} + \overrightarrow{p(D)D})$$

$$= (\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B} \mid \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D})$$

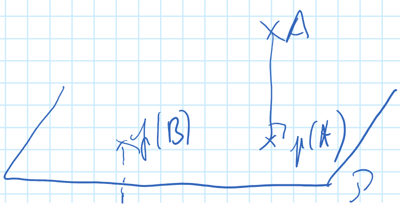
$$+ \underbrace{(\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D})}_{0}$$ car $\overrightarrow{Cp(C)}$ et $\overrightarrow{p(D)D}$ orthogonaux à $\vec{P}$

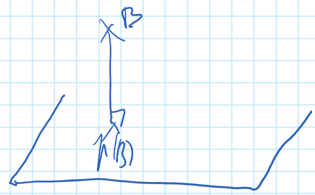
$$+ \underbrace{(\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)})}_{0}$$

$$+ \underbrace{(\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)})}_{0}$$

Il nous reste donc $(\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B} \mid \overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D}) = 0$.

Comme on est en dimension 3, tous les vecteurs $\overrightarrow{Ap(A)}$, $\overrightarrow{p(B)B}$, $\overrightarrow{Cp(C)}$ et $\overrightarrow{p(D)D}$ ont la même direction.





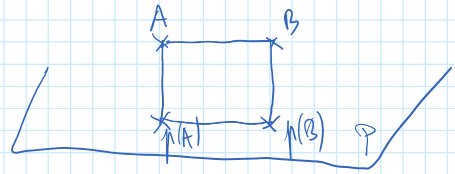
Comme $\overrightarrow{Ap(A)} + \overrightarrow{p(B)B}$ et $\overrightarrow{Cp(C)} + \overrightarrow{p(D)D}$ sont dans la même direction, on a

$$0 = \left(\overrightarrow{Ap(A)}+\overrightarrow{p(B)B} \mid \overrightarrow{Cp(C)}+\overrightarrow{p(D)D}\right) = \pm \|\overrightarrow{Ap(A)}+\overrightarrow{p(B)B}\| \times \|\overrightarrow{Cp(C)}+\overrightarrow{p(D)D}\|$$

On a donc $\|\overrightarrow{Ap(A)}+\overrightarrow{p(B)B}\| = 0$ ou $\|\overrightarrow{Cp(C)}+\overrightarrow{p(D)D}\| = 0$

i.e. $\overrightarrow{Ap(A)} = \overrightarrow{Bp(B)}$ ou $\overrightarrow{Cp(C)} = \overrightarrow{Dp(D)}$

i.e. $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{P}}$ ou $\overrightarrow{CD} \in \vec{\mathcal{P}}$

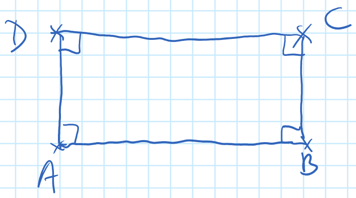


Exercice 4: $ABCD$ un quadrilatère dans $\mathcal{E}$ espace affine euclidien.

On suppose que $(AB)\perp(BC)$, $(BC)\perp(CD)$, $(CD)\perp(DA)$, $(DA)\perp(AB)$.

Mq. A,B,C,D coplanaires.

* Preuve avec un repère



On considère le repère orthonormé $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|}, \frac{\overrightarrow{AD}}{\|AD\|}, \vec{v}\right)$

où $\vec{v}$ est un vecteur de norme 1 orthogonal au plan (ABD).

Notons (x,y,z) les coordonnées de C dans ce repère.

On a $(BC)\perp(AB)$, donc $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AB}) = 0$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x-AB, y, z)$

$\overrightarrow{AB}$ ——— $(AB, 0, 0)$

$0 = (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AB}) = (x-AB)AB \Rightarrow x - AB = 0$ (car $AB \neq 0$)

$\boxed{x = AB}$

On a $(DC)\perp(AD)$, donc $(\overrightarrow{DC} \mid \overrightarrow{AD}) = 0$

$\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(x, y-AD, z)$

$\overrightarrow{AD}$ ——— $(0, AD, 0)$

$0 = (\overrightarrow{DC} \mid \overrightarrow{AD}) = (y-AD)AD \Rightarrow \boxed{y = AD}$ (car $AD \neq 0$)

$0 = (\overrightarrow{DC} \mid \overrightarrow{AD}) = (y - AD)\, AD \Rightarrow \boxed{y = AD}$ (car $AD \neq 0$)

On a $(BC) \perp (DC)$ donc $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{DC}) = 0$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(x - AB, y, z) = (0, AD, z)$

$\overrightarrow{DC}$ ——— $(x, y - AD, z) = (AB, 0, z)$

$0 = (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{DC}) = z^2 \Rightarrow z = 0$ et donc C est dans le plan (ABD).

* preuve en utilisant l'exercice 3 :

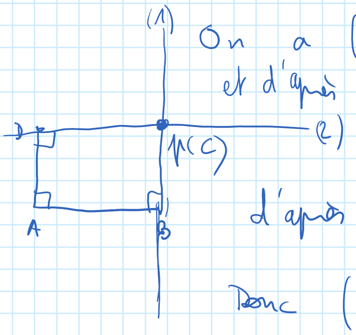
Soit P le plan (ABD) et p la projection orthogonale sur P.

On veut montrer que $p(C) = C$.

On a $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC}) = 0$ et $\overrightarrow{AB} \in \vec{P}$ donc d'après l'exo 3,
$(\overrightarrow{p(A)p(B)} \mid \overrightarrow{p(B)p(C)}) = 0$, i.e. $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{Bp(C)}) = 0$ (1)

On a $(\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{CD}) = 0$ et $\overrightarrow{AD} \in \vec{P}$, donc d'après l'exo 3,
$(\overrightarrow{p(A)p(D)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)}) = 0$, i.e. $(\overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{p(C)D}) = 0$ (2).

On calcule $(\overrightarrow{p(B)p(C)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)}) = (\overrightarrow{Bp(C)} \mid \overrightarrow{p(C)D})$



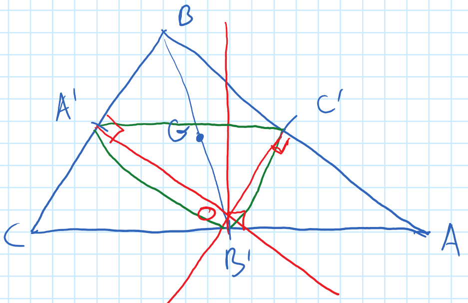
On a $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD}) = 0$ car $(AB) \perp (AD)$
et d'après (1), $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{Bp(C)}) = 0$ et donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{Bp(C)}$ sont colinéaires (car ils appartiennent tous deux à $\vec{P}$)

d'après (2), $(\overrightarrow{p(C)D} \mid \overrightarrow{AD}) = 0$ et donc $\overrightarrow{p(C)D}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc $(\overrightarrow{Bp(C)} \mid \overrightarrow{p(C)D}) = 0$ car $\overrightarrow{Bp(C)}$ et $\overrightarrow{p(C)D}$ sont orthogonaux, tout comme $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

On a donc $(\overrightarrow{p(B)p(C)} \mid \overrightarrow{p(C)p(D)}) = 0$, et d'après l'exo 3,
on a $\overrightarrow{BC} \in \vec{P}$ ou $\overrightarrow{DC} \in \vec{P}$ donc $C \in P$.
(car B et $D \in P$)

Exercice 5 : ABC triangle non plat dans un plan affine euclidien
A' milieu de $[BC]$
B' ——— $[AC]$
C' ——— $[AB]$
G centre de gravité de ABC.



1) Soit O le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$

1) Soit O le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$.
$OA = OB$ car $O \in m_{AB}$:= médiatrice de $[AB]$
$OA = OC$ car $O \in m_{AC}$:= médiatrice de $[AC]$

Donc on a aussi $OB = OC$, ce qui veut dire que $O \in m_{BC}$ la médiatrice de $[BC]$.
Les trois médiatrices sont bien concourantes en O.
O est à la même distance de A, B et C, donc le cercle de centre O et de rayon $OA = OB = OC$ passe bien par les trois sommets A, B et C. C'est le cercle circonscrit.
Réciproquement, tout cercle $\mathcal{C}'$ passant par A, B, C et centré en un point O' tq. $O'A = O'B = O'C$ satisfait : O' est à l'intersection des médiatrices, donc $O' = O$

Donc on a bien $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ car les deux cercles ont le même centre et le même rayon

2) G centre de gravité de A, B, C donc $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$
$= \vec{GA} + 2\vec{GA'}$ car A' milieu de $[BC]$.

Donc $\vec{GA'} = -\frac{1}{2}\vec{GA}$

Soit h l'homothétie de centre G et rapport $-\frac{1}{2}$. On a $h(A) = A'$.

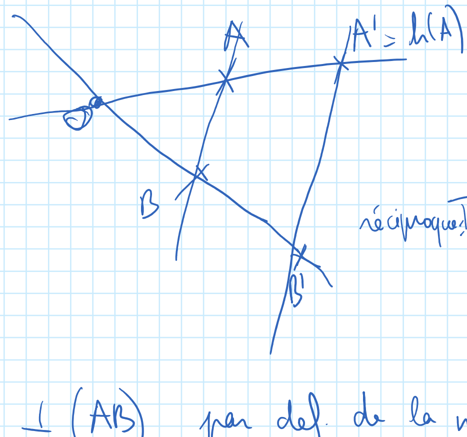
On a aussi $\vec{GB} + 2\vec{GB'} = 0$ et $\vec{GC} + 2\vec{GC'} = 0$
donc $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.

Donc h transforme ABC en $A'B'C'$.

h est une application affine, elle préserve donc les barycentres.
Donc l'isobarycentre de $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$ est $h(G)$, l'image de l'isobarycentre G de A, B, C par h.

3) $(A'B') \parallel (AB)$ car les homothéties envoient toujours une droite sur une droite parallèle à celle-ci.

dem : h homothétie de centre O rapport k



$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

réciproque Thalès $\Rightarrow (AB) \parallel (A'B')$

On a $m_{AB} \perp (AB)$ par déf. de la médiatrice
et comme $(AB) \parallel (A'B')$, alors $m_{AB} \perp (A'B')$
De plus, $C' \in m_{AB}$ car c'est le milieu de $[AB]$.

Donc $m_{AB} \perp (A'B')$ et passe par C', c'est la hauteur de $A'B'C'$ issue de C'.

Donc $m_{AB} \perp (A'B')$ et passe par C', c'est la hauteur de $A'B'C'$ issue de C'.
Idem pour B' et A' : m_{BC} est donc ——— A'
m_{AC} ——— B'