Exercice 1 : $\mathcal{E}$ espace affine sur $\mathbb{K}$

jeudi 4 mars 2021 08:49

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ application affine de partie linéaire $\vec{f}$

① $\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{E} \mid f(M) = M \}$ l'ensemble des points fixes de f.
Mq si $\mathcal{F}$ non vide, alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})$.

On suppose que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Soit $C \in \mathcal{F}$, i.e. $C \in \mathcal{E}$ tq. $f(C) = C$.
On définit l'espace affine $\mathcal{G} = C + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})$.
On va montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$: Soit $A \in \mathcal{G}$. Mq. $A \in \mathcal{F}$.
On a $f(A) = C + \vec{f}(\vec{CA})$ (car f affine).
De plus, $A \in \mathcal{G}$ et $C \in \mathcal{G}$, donc $\vec{CA} \in \underbrace{\vec{\mathcal{G}}}_{= \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})}$ la direction de $\mathcal{G}$.

$\vec{CA} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})$ donc $\vec{f}(\vec{CA}) - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{CA}) = 0$
i.e. $\vec{f}(\vec{CA}) - \vec{CA} = 0$

Donc $f(A) = C + \vec{f}(\vec{CA}) = C + \vec{CA} = A$.
Donc $A \in \mathcal{F}$.

* $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$: Soit $B \in \mathcal{F}$. Mq. $B \in \mathcal{G}$.
Par déf. de $\mathcal{F}$, on a $f(B) = B$.
On a $\vec{f}(\vec{CB}) = \overrightarrow{f(C)f(B)}$ (par déf. applications affines)
$= \vec{CB}$.

On a donc $\vec{f}(\vec{CB}) - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{CB}) = 0$, i.e. $\vec{CB} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})$.
Donc $B = C + \vec{CB} \in \mathcal{G}$.

On a montré que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. $\square$

② (i) f possède un unique point fixe
(ii) l'application linéaire $\vec{f}$ n'admet pas 1 pour valeur propre.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : On suppose que f a un unique point fixe C, i.e. $\mathcal{F} = \{C\}$.
Donc $\mathcal{F} = C + \{\vec{0}\}$, et d'après ①, $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}) = \{\vec{0}\}$.
Rappel : λ est valeur propre de $\vec{f}$ si il existe un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$ tq. $\vec{f}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$
On a $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}) = \{\vec{0}\}$, donc $\vec{0}$ est le seul vecteur $\vec{x}$ tq. $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$.
Donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.
Soit $A \in \mathcal{E}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a $f(M) = M$ ssi $\vec{AM} = \overrightarrow{Af(M)}$
$= \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)}$
ssi $(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})(\vec{AM}) = \overrightarrow{f(A)A}$

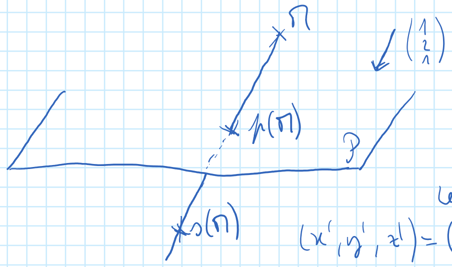
Comme 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, alors $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$ est injective.
Comme $\mathcal{E}$ est de dim. finie, alors $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$ est aussi surjective.
Donc le vecteur $\overrightarrow{f(A)A}$ a un unique antécédent par $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$.
Il existe donc un unique $M \in \mathcal{E}$ tq $(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})(\vec{AM}) = \overrightarrow{f(A)A}$.
Ce point M est l'unique point fixe de f.

Exercice 2 : $\mathcal{E}$ espace affine réel de dim. 3.

① Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + z + 3 = 0$
Soit p la projection affine sur $\mathcal{P}$ dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(1) $\vec{\mathcal{P}}$ [illegible] $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{P}} \oplus \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \ldots \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \notin \vec{\mathcal{P}}$ donc on a bien $\mathcal{E} = \vec{\mathcal{P}} \oplus \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Soit $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z). On veut calculer les coordonnées de $p(M)$.



Le point $p(M)$ est l'intersection entre la droite passant par M de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et de $\mathcal{P}$.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq. $\overrightarrow{Mp(M)} = \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $p(M) = M + \overrightarrow{Mp(M)}$ sont

$(x', y', z') = (x+\lambda, y+2\lambda, z+\lambda)$.

D'autre part, $p(M) \in \mathcal{P}$ donc $2(x+\lambda) - (y+2\lambda) + (z+\lambda) + 3 = 0$

i.e. $2x + 2\lambda - y - 2\lambda + z + \lambda + 3 = 0$

i.e. $\lambda = -2x + y - z - 3$.

D'où $p(M)$ est de coordonnées (x', y', z') avec

$$\begin{cases} x' = -x + y - z - 3 \\ y' = -4x + 3y - 2z - 6 \\ z' = -2x + y - 3 \end{cases} \quad (y' = y + 2\lambda = y - 4x + 2y - 2z - 6)$$

Soit s la sym. affine par rapport au plan $\mathcal{P}$ dans la direction $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{p(M)s(M)}$ et $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$.

On avait $\overrightarrow{Mp(M)} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Donc $s(M)$ a pour coordonnées (x'', y'', z'') avec

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2\lambda = x - 4x + 2y - 2z - 6 = -3x + 2y - 2z - 6 \\ y'' &= y + 4\lambda = y - 8x + 4y - 4z - 12 = -8x + 5y - 4z - 12 \\ z'' &= z + 2\lambda = z - 4x + 2y - 2z - 6 = -4x + 2y - z - 6. \end{aligned}$$

② Soit $(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a $f(x, y, z) = (x', y', z')$ avec

$$\begin{cases} x' = 1 - y - z \\ y' = 2 - 2x - y - 2z \\ z' = -2 + 2x + 2y + 3z \end{cases}$$

$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + \vec{f}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$ et $\vec{f}$ a pour matrice $\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Calculons les valeurs propres de $\vec{f}$.

$$\det(\vec{f} - X\,\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}) = \begin{vmatrix} -X & -1 & -1 \\ -2 & -1-X & -2 \\ 2 & 2 & 3-X \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_1$$

$$= \begin{vmatrix} -X & -1 & -1+X \\ -2 & -1-X & 0 \\ 2 & 2 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 & -1 \\ -2 & -1-X & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 & -1 \\ -2 & -1-X & 0 \\ -X+2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{dév. selon la dernière colonne}$$

$$= (1-X)\left(2+(1-X)(-X+2)\right)$$
$$= (1-X)\left(2+X-2+X^2-2X\right)$$
$$= (1-X)\left(X^2-X\right)$$
$$= -X(X-1)^2$$

Le polynôme caractéristique a deux racines : 0, 1 qui sont les propres de $\vec{f}$.

Soit $\vec{E_0}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 0. $(\vec{E_0} = \operatorname{Ker} \vec{f})$

On a $(x,y,z) \in \vec{E_0} \iff \vec{f}(x,y,z) = 0$

$$\iff \begin{cases} -y-z=0 \\ -2x-y-2z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2+L_3$$

$$\iff \begin{cases} -y-z=0 \\ y+z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-z \\ 2x+z=0 \end{cases}$$

$$\vec{E_0} = \operatorname{Ker}\vec{f} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{E_1} = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

$(x,y,z) \in \vec{E_1}$ ssi $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$

ssi $\begin{cases} -y-z=x \\ -2x-y-2z=y \\ 2x+2y+3z=z \end{cases}$

ssi $\begin{cases} -x-y-z=0 \\ -2x-2y-2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$

ssi $x+y+z=0$

$\vec{E_1}$ est donc le plan d'équation $x+y+z=0$

Pour résumer, $\vec{f}$ laisse l'espace $\vec{E_1}$ (qui est un plan) constant et envoie l'espace $\vec{E_0}$ (qui est une droite vectorielle) sur $\vec{0}$.

$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E_0} \oplus \vec{E_1}$

$$\vec{f} : \underset{\vec{E_0}}{\underset{\cap}{\vec{u}}} + \underset{\vec{E_1}}{\underset{\cap}{\vec{v}}} \longmapsto \vec{v}$$

$\vec{f}$ est donc la projection sur $\vec{E_1}$ dans la direction $\vec{E_0}$.

Calculons un point fixe de f

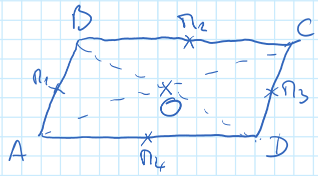
$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = 2 - 2x - y - 2z \\ z = -2 + 2x + 2y + 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+2y+2z = 2 \\ 2x+2y+2z = 2 \end{cases}$$

Par exemple, le point $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un point fixe de f.

Plus généralement, le plan P d'équation $x+y+z=1$ est l'ensemble des points fixes de f. Il est égal à $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \vec{E_1}$.

f est la projection affine sur P dans la direction $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 3 :



① Déterminer les applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui préservent ABCD.

ABCD est un parallélogramme non aplati ssi $\vec{AB} = \vec{DC}$ et $\vec{AB}, \vec{AD}$ non colinéaires.

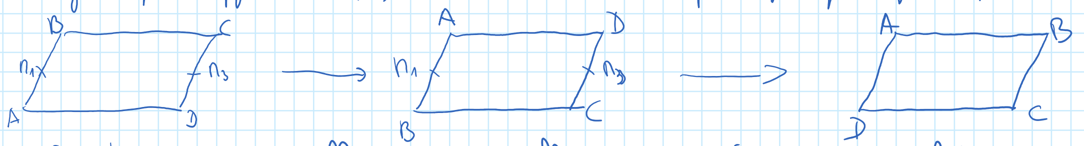
(A, B, D) forme un repère du plan $\mathcal{E}$.

Un application affine est totalement déterminée par les images de A, B et D.

Cherchons quelques solutions évidentes :

- l'identité : $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(D) = D$
- symétrie centrale par rapport à O : $f(A) = C$, $f(B) = D$, $f(D) = B$
- sym. par rapport à AC parallèlement à BD : $f(A) = A$, $f(B) = D$, $f(D) = B$
- ——— BD ——— AC : $f(A) = C$, $f(B) = B$, $f(D) = D$
- ——— $\Omega_2\Omega_4$ ——— AD : $f(A) = D$, $f(B) = C$, $f(D) = A$
- ——— $\Omega_1\Omega_3$ ——— AB : $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(D) = C$.

sym. par rapport à $\Omega_1\Omega_3$ parallèlement à AB, puis sym. par rapport à AC parallèlement à BD



On trouve une nouvelle application affine qui préserve le parallélogramme ABCD :

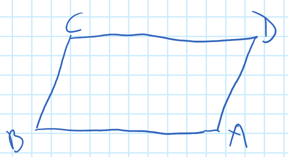
$f(A) = D$, $f(B) = A$, $f(D) = C$. (C'est une permutation cyclique des sommets).

Notons Ω cette application.

Ω^2 :

on l'avait déjà, c'est la sym. centrale par rapport à O.

Ω^3 :



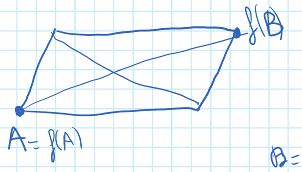
nouvelle application : $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(D) = A$.

Ω^4 : identité

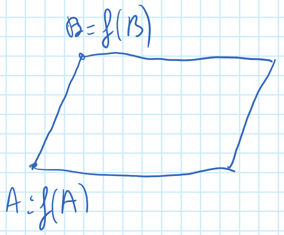
Nous avons trouvé 8 applications. Montrons que ce sont les seules.

Quitte à composer par Ω^i pour la bonne puissance $i \in \{0, \dots, 3\}$, on peut supposer que $f(A) = A$.

- On ne peut pas avoir $f(B) = C$, car sinon $f(\vec{AB}) \neq f(\vec{DC})$



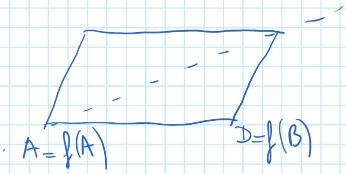
- Si $f(B) = B$



$f(\vec{AB}) = f(\vec{DC})$

donc forcément $f(D) = D$, $f(C) = C$.
f est l'identité.

- Si $f(B) = D$



Comme $f(\vec{AB}) = f(\vec{DC})$,
forcément $f(D) = B$, $f(C) = C$
f est la sym. par rapport à AC parallèlement à BD. On l'appelle s.

On a prouvé que toute application affine qui préserve ce parallélogramme s'écrit sous la forme $r^i \circ s^j$ avec $i \in \{0,1,2,3\}$, $j \in \{0,1\}$

(2) Le groupe formé par ces applications est le groupe diédral D_4.

$$D_4 = \left\{ r^i \circ s^j \; : \; \begin{array}{l} r \text{ est un élément d'ordre } 4 \\ s \text{ d'ordre } 2 \neq r^2 \end{array} \right\}$$

D_n groupe des isométries qui conservent un polygône régulier à n côtés.
Il contient $2n$ éléments :
- n rotations de centre le milieu du polygône, d'angle $\frac{2ik\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n-1$
- n réflexions

Exercice 4 : h_1 homothétie de rapport λ_1 et de centre A.
h_2 ——— λ_2 et de centre B.

Etudions $f = h_2 \circ h_1$.

(1) Si $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, mq. f translation.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On a
$$h_1(M) = h_1(A + \vec{AM}) = A + \lambda_1 \vec{AM}$$

Donc
$$\begin{aligned} f(M) = h_2 \circ h_1(M) &= h_2(A + \lambda_1 \vec{AM}) \\ &= h_2(B + \vec{BA} + \lambda_1 \vec{AM}) \\ &= B + \lambda_2 (\vec{BA} + \lambda_1 \vec{AM}) \\ &= B + \lambda_2 \vec{BA} + \vec{AM} \\ &= B + (\lambda_2 - 1)\vec{BA} + \vec{BA} + \vec{AM} \\ &= M + (\lambda_2 - 1)\vec{BA} \end{aligned}$$

Donc f est une translation de vecteur $(\lambda_2 - 1)\vec{BA}$.

② Si $\lambda_2\lambda_1 \neq 1$, mq. f homothétie

On a toujours $f(M) = B + \lambda_2 \vec{BA} + \lambda_2\lambda_1 \vec{AM}$

Cherchons un point fixe C de f.

$f(C) = B + \lambda_2 \vec{BA} + \lambda_2\lambda_1 \vec{AC} = C$

$= \underbrace{B + \vec{BA} + \vec{AC}}_{=C} + (\lambda_2 - 1)\vec{BA} + (\lambda_2\lambda_1 - 1)\vec{AC} = C$

$\Rightarrow (\lambda_2 - 1)\vec{BA} = (\lambda_2\lambda_1 - 1)\vec{CA}$

$\Rightarrow \vec{AC} = \dfrac{1-\lambda_2}{1-\lambda_2\lambda_1}\vec{AB}$

Donc $C = A + \dfrac{1-\lambda_2}{1-\lambda_2\lambda_1}\vec{AB}$ est le point fixe de f.

Montrons que f est une homothétie de centre C.

On a $\vec{Cf(M)} = \vec{f(C)f(M)}$ car C point fixe

$= \vec{f}(\vec{CM})$ car f app. affine

$= \vec{h_2} \circ \vec{h_1}(\vec{CM})$ car $f = h_2 \circ h_1$

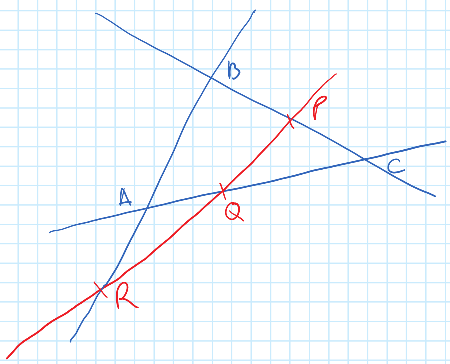
$= \lambda_2\lambda_1 \vec{CM}$.

Donc on a bien $f(M) = f(C + \vec{CM})$

$= C + \lambda_2\lambda_1 \vec{CM}$

et f est donc bien une homothétie de centre C et rapport $\lambda_2\lambda_1$

③



Mq. P, Q, R alignés ssi $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

On définit les homothéties :

- h_P de centre P, rapport $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$
- h_Q —— Q —— $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$
- h_R —— R —— $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$

$h_R(B) = A$, $h_Q(A) = C$, $h_P(C) = B$.

Donc B est un point fixe de $h_P \circ h_Q \circ h_R$.

On a $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \neq 1$ sinon on aurait $A = B$ et le triangle serait plat.

Idem pour $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ et $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$.

D'après ① et ②, $h_P \circ h_Q \circ h_R$ translation ou homothétie.

Si c'est une translation, alors c'est l'identité car il y a un point fixe.

Donc $h_P \circ h_Q \circ h_R$ est soit une homothétie soit l'identité.

* Si $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$, alors $\overrightarrow{h_P \circ h_Q \circ h_R}(\vec{BM}) = \vec{BM}$

$\overline{PC} \quad \overline{QA} \quad \overline{RB}$ donc $h_P \circ h_Q \circ h_R$ identité

Donc $h_Q \circ h_R = h_P^{-1}$.

Soit $V = h_P^{-1}(R)$. Par déf. V, P, R alignés.

Or $V = h_Q \circ h_R (R) = h_Q(R)$ donc V, Q, R alignés.

$\Rightarrow P, Q, R$ alignés.

* Si P, Q, R alignés sur une droite Δ, alors f n'est pas une homothétie, car sinon on aurait P, Q, R, B alignés (car B point fixe).

C'est impossible car $B \notin \Delta$.

Donc f est l'identité, et donc son rapport $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ vaut 1.