Exercice 1 : On construit un Dobble à n cartes de manière inductive.

- 2 cartes : A, A
- 3 cartes : AB, AC, BC
- 4 cartes : ABD, ACE, BCF, DEF

On suppose qu'on a $n-1$ cartes tq toute paire de ces cartes a exactement un symbole en commun. (ex: cartes AB, AC, BC, symboles A, B, C)
On prend $n-1$ nouveaux symboles (ex: D, E, F), et on ajoute chacun d'entre eux à une des $n-1$ cartes (ex: ABD, ACE, BCF). Ces nouvelles $n-1$ cartes ont toujours bien la propriété que 2 cartes ont exactement un symbole en commun.
On crée une n-ème carte qui contient ces $n-1$ nouveaux symboles (ex: DEF)
Par construction, cette carte a aussi exactement un symbole en commun avec les $n-1$ premières cartes que l'on a construites.

Chacune des cartes contient $n-1$ symboles.

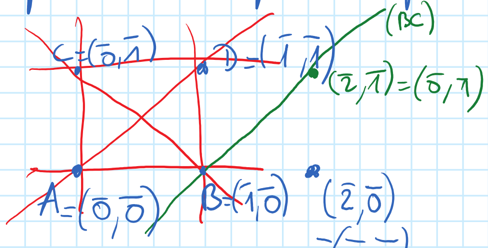
Dans un jeu de 55 cartes, chaque carte contient donc 54 symboles.
C'est beaucoup...

Un Dobble un peu plus "intelligent"

symboles $\longleftrightarrow$ points du plan $\mathbb{F}_p^2$
cartes $\longleftrightarrow$ droites

Deux droites distinctes du plan se coupent en au plus un point.

Exercice 2 : ex: $p=2$



cartes : AB, AC, AD, BC, BD, CD

Deux cartes ont 0 ou 1 symbole en commun

Soit p premier.

En général dans $\mathbb{F}_p^2$, symboles $\leftrightarrow$ points de $\mathbb{F}_p^2$: il y en a p^2
cartes $\leftrightarrow$ droites de $\mathbb{F}_p^2$: il y en a p^2+p (exo 6 feuille 1)

Il y a p points sur une droite de $\mathbb{F}_p^2$, donc p symboles par carte.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{D}$ droite de $\mathbb{F}_p^2$, soit $\mathcal{D}_0$ une droite sécante à $\mathcal{D}$ en A.

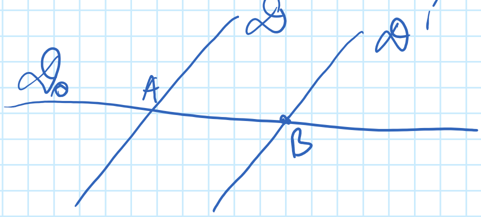
(1) Mq. toute droite $\mathcal{D}'$ // à $\mathcal{D}$ s'écrit de manière unique sous la forme

① Mq. toute droite $\mathcal{D}'$ // à $\mathcal{D}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathcal{D}' = B + \overrightarrow{\mathcal{D}} \qquad \text{avec } B \in \mathcal{D}_0.$$

Toute droite $\mathcal{D}'$ // à $\mathcal{D}$ peut s'écrire sous la forme $\mathcal{D}' = C + \overrightarrow{\mathcal{D}}$ avec $C \in \mathbb{F}_p^2$, mais il y a p choix pour C (les p points de $\mathcal{D}'$).

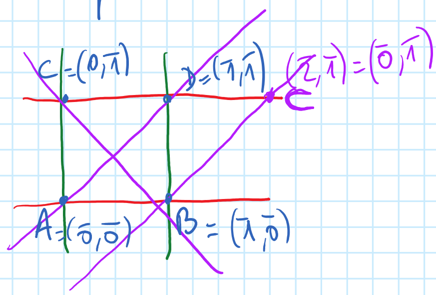
$\mathcal{D}_0$ est sécante à $\mathcal{D}$ donc, comme $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}_0$ est aussi sécante à $\mathcal{D}'$.



On appelle B le point d'intersection entre $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'$.
Ce point B est unique, et on a bien $\mathcal{D}' = B + \overrightarrow{\mathcal{D}}$.

② D'après ①, comme toute droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ s'écrit de manière unique sous la forme $B + \overrightarrow{\mathcal{D}}$ avec $B \in \mathcal{D}_0$, alors il y a autant de droites $\mathcal{D}'$ parallèles à $\mathcal{D}$ que de points $B \in \mathcal{D}_0$, c'est à dire p.

Exercice 4 : ①



(AB) // (CD)
(AC) // (BD)
(AD) // (BC)

② E nouveau symbole pour (AB) et (CD) → ABE, CDE
F ——— (AC) et (BD) → ACF, BDF
G ——— (AD) et (BC) → ADG, BCG

nouvelles cartes

Et on crée une $7^{\text{ème}}$ nouvelle carte : EFG.

Vérifions que ces 7 cartes forment un Dobble à 7 cartes et 7 symboles

- 7 cartes
- 7 symboles ABCDEFG
- chaque carte contient 3 symboles
- Toute paire de 2 cartes a exactement un symbole en commun.

Avant d'ajouter les nouveaux symboles, les paires de droites // avaient 0 symbole en commun (ex : AB et CD). Après ajout des nouveaux symboles, elles en ont un (ex : ABE et CDE ont E en commun)

Les paires de droites non parallèles avaient déjà un symbole en commun avant d'ajouter les nouveaux symboles (ex: AB et AC), et

en ont toujours un après car on a ajouté des symboles différents
(ex : ABE et ACF).
La nouvelle carte (ex : EFG) est faite uniquement de nouveaux symboles
et donc, comme on a ajouté un nouveau symbole à chaque carte, elle
a exactement un symbole en commun avec chaque autre carte.

On a bien un jeu de Dobble.