Exercice 2 : $\mathcal{E}$ plan affine réel

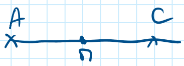
① Soient A, B, C, D des points distincts de $\mathcal{E}$.

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
(iii) les segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ssi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Soit Ω le milieu de $[AC]$



On a $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{\Omega C}$. $(*)$

D'après Chasles, on a : $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D\Omega}$ (1)
$\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BC}$ (2)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, alors d'après $(*)$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BC}$
et donc $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{\Omega B}$.
donc Ω est le milieu de $[BD]$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si Ω est le milieu de $[BD]$, on a $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{\Omega B}$, et d'après $(*)$, alors (1) et (2) donnent $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

② Si A, B, C, D non alignés, alors (i), (ii), (iii) sont équivalentes à $(AB) // (CD)$ et $(AD) // (BC)$. ②

(i) et (ii) $\Rightarrow$ ② Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $(AB) // (CD)$.
Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, alors $(AD) // (BC)$.

② $\Rightarrow$ (i) et (ii) Si $(AB) // (CD)$, alors $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{DC}$ avec $k \in K^*$.
Si $(AD) // (BC)$, alors $\overrightarrow{AD} = k'\,\overrightarrow{BC}$ avec $k' \in K^*$

D'après Chasles, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$
$= k'\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$
$= k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$ d'après Chasles

$k'\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{DB}$

$(*)$ $(k'-k)\overrightarrow{BC} + (1-k)\overrightarrow{DB} = 0$.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas colinéaires, sinon A, B, C, D seraient alignés.

Donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB}$ forment une famille libre et $\lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BD} = 0$ ssi $\lambda = \mu = 0$.

On a donc $\begin{cases} k' - k = 0 \\ 1 - k = 0 \end{cases}$ d'après $(*)$

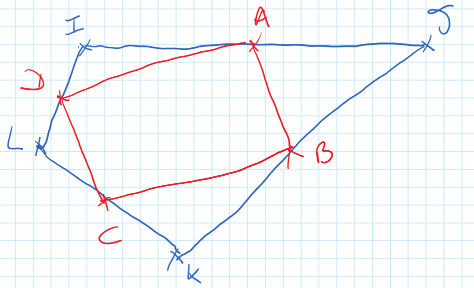
$\Rightarrow k' = k = 1$.

Donc on a bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

③ Th. de Varignon : les milieux des côtés d'un quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme.

Soit $IJKL$ un quadrilatère

Soit $IJKL$ un quadrilatère



A milieu de $[IJ]$
B ——— $[JK]$
C ——— $[KL]$
D ——— $[IL]$

A est le milieu de $[IJ]$ donc $\vec{IJ} = 2\vec{AJ}$ $\left(= 2\vec{JA}\right)$
B ——— $[JK]$ donc $\vec{JK} = 2\vec{JB}$ $\Rightarrow \vec{IJ}+\vec{JK} = 2(\vec{AJ}+\vec{JB})$

D'après la relation de Chasles, on a $\vec{IK} = 2\vec{AB}$. (a)

C est le milieu de $[KL]$ donc $\vec{KL} = 2\vec{CL}$.
D ——— $[IL]$ donc $\vec{LI} = 2\vec{LD}$.
En additionnant ces deux égalités, on obtient $\vec{KL}+\vec{LI} = 2(\vec{CL}+\vec{LD})$
et donc $\vec{KI} = 2\vec{CD}$ (b) d'après Chasles.
En additionnant (a) et (b), on obtient $\underbrace{\vec{IK}+\vec{KI}}_{=\vec{0}} = 2(\vec{AB}+\vec{CD})$

donc $\vec{AB} = -\vec{CD} = \vec{DC}$.

C'est exactement la propriété (i) de 1, et d'après 2, c'est équivalent à $\big((AB) // (CD)$ et $(AD) // (BC)\big)$.
Donc $ABCD$ est bien un parallélogramme.

<u>Exercice 3</u>: On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1,2,3)$ et dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Remarque : $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont non colinéaires, ils engendrent donc bien un plan.

On a $\mathcal{P} = A + \vec{\mathcal{P}}$ avec $\vec{\mathcal{P}} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{P}} \iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ X = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = \lambda_1+\lambda_2 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_1+\lambda_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \lambda_1 \\ x = z \end{cases}$$

$\vec{\mathcal{P}} = \{(x,y,z) : x = z\}$ donc $x = z$ est une équation cartésienne de $\vec{\mathcal{P}}$.

Donc $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x = z + c$ et $A \in \mathcal{P}$
$\iff 1 = 3 + c$
$\iff c = -2$

$\mathcal{P}$ a pour éq. cartésienne $\boxed{x = z - 2}$.

2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + z + 2 = 0$.
On cherche un paramétrage de $\mathcal{P}'$.
Le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}'}$ correspondant $\mathcal{P}'$ a pour eq. cartésienne $2x - y + z = 0$

On cherche deux vecteurs non colinéaires qui appartiennent à $\overrightarrow{P'}$.

$$\left(\begin{array}{l}\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix}\in\overrightarrow{P'} : \ 2\times\frac{1}{2}-1+0=0\\[1ex] \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\in\overrightarrow{P'} : \ 2\times 1-1-1=0\end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in\overrightarrow{P'}$ et ils sont non colinéaires.

Donc $X(x,y,z)\in\overrightarrow{P'}$ ssi $\exists h_1, h_2\in\mathbb{R}$ tq. $\underbrace{X = h_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+h_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{\text{repr paramétrique de } \overrightarrow{P'}}$

Pour en déduire une repr. paramétrique de P', on cherche un point A de P'

$A(-1,0,0)\in P'$ car $2\times(-1)-0+0+2=0$

On a $P' = A+\overrightarrow{P'}$, donc $X(x,y,z)\in P'$ ssi $\exists h_1,h_2\in\mathbb{R}$ tq

$$X = A + h_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+h_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

i.e. $\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+h_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+h_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{\text{paramétrage de } P'}$.

Exercice 4 : $\mathcal{E}$ espace affine réel de dim. 3, repère $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

① Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases}x-2y+z+1=0\\2x-3y-z+3=0\end{cases}$

On résout le système. $L_2\leftarrow L_2-2L_1$

$$\begin{cases}x-2y+z+1=0\\ \quad y-3z+1=0\end{cases}$$

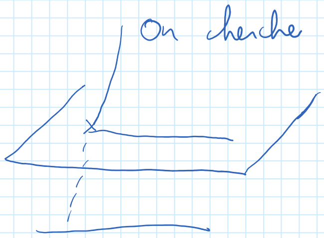
$$\begin{cases}x = 2y-z-1 = 6z-2-z-1 = 5z-3\\ y = 3z-1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5z-3\\3z-1\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{D} = \left\{\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\}}$$
$$= \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}+\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}\right)$$

② Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et P $(x-y-z-1=0)$.

On cherche les valeurs de z tq. $\begin{pmatrix}-3+5z\\-1+3z\\z\end{pmatrix}\in P$



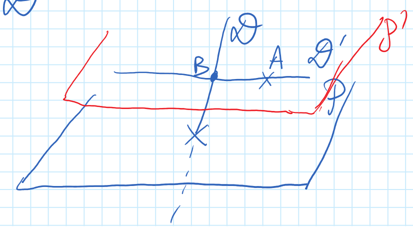
i.e. tq. $-3+5z+1-3z-z-1=0$

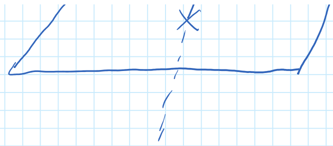
$\iff z-3=0$

$\iff z=3$

Il y a donc un point d'intersection de $\mathcal{D}$ et P : $\begin{pmatrix}-3+5\times3\\-1+3\times3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix}$.

③ Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par $A(1,0,1)$, faiblement $/\!/$ à P, qui rencontre $\mathcal{D}$





$\mathcal{D}'$ faiblement parallèle à $\mathcal{P}$, donc $\mathcal{D}'$ appartient à un plan $\mathcal{P}'$ parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-y-z-1=0$.

$\mathcal{P}'$ a pour équation $x-y-z=c$.

$\mathcal{D}'$ passe par A, donc $A \in \mathcal{P}'$, et donc $1-0-1=c$ donc $c=0$.

L'équation de $\mathcal{P}'$ est donc $\underline{x-y-z=0}$.

Soit $B(x,y,z)$ le point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}'$.

D'après (1), $B \in \mathcal{D}$ donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z-3 \\ 3z-1 \\ z \end{pmatrix}$

$B \in \mathcal{P}'$ donc $5z-3-(3z-1)-z=0$, i.e. $z=2$.

Donc B a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5\times 2-3 \\ 3\times 2-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc $\mathcal{D}' = \{A + t\overrightarrow{AB} : t \in \mathbb{R}\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) On cherche des équations cartésiennes de $\mathcal{D}'$.

On a $(x,y,z) \in \mathcal{D}'$ ssi $\begin{cases} x = 1+6t \\ y = 5t \\ z = 1+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On élimine t de ces équations : $(L_1 \leftarrow L_1 - 6L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3)$

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} x - 6z = -5 \\ y - 5z = -5 \end{array}} \\ z = 1+t \end{cases}$$