TD1

mercredi 27 janvier 2021 12:19

Exercice 1 : Soit V un e.v. de dim. finie sur K

Soit $f : V \to V$ linéaire tq $f^2 = f$. ($f(f(x)) = f(x)$ $\forall x \in V$)

$W = \ker f$, $W' = \operatorname{Im} f$

1) Mq. $V = W \oplus W'$

(en d'autres termes, mq. W et W' supplémentaires dans V)

c'est à dire $V = W + W'$ (a)

et $W \cap W' = \{0\}$ (b)

(a) • $W + W' \subset V$ car W et W' sont des s.e.v. de V

• Mq $V \subset W + W'$. Soit $x \in V$. Mq. $x = \underset{\in W}{y} + \underset{\in W'}{z}$

$$x = \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f \text{ par définition}} + x - f(x)$$

$\operatorname{Im} f = W'$

Il reste à montrer que $x - f(x) \in W = \ker f$

$$f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x))$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

Donc $x \in W + W'$, et donc $V = W + W'$.

(b) Mq $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

On a $f(x) = 0$ car $x \in \ker f$

Il existe y tq $f(y) = x$ car $x \in \operatorname{Im} f$

Donc $f(f(y)) = f(x)$. Donc $x = f(x) = 0$

$f(f(y)) = f(y) = x$

On a bien $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

$$\boxed{V = W \oplus W'}.$$

mercredi 27 janvier 2021 12:19

2) Construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array} \left(\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{p} & \overbrace{0}^{q} \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$

avec $0 \leq p \leq \dim V$
et $p+q = \dim V$

Posons $p = rg f = \dim(\operatorname{Im} f)$

(rappel : théorème du rang $\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$)

Posons $q = \dim(\operatorname{Ker} f)$.

On a bien $p+q = \dim V$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Im} f$

$(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ ——— $\operatorname{Ker} f$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Calculons $f(e_i)$.

$e_i \in \operatorname{Im} f$, donc $\exists u \in V$ tq $f(u) = e_i$.

$$\underbrace{f(f(u))}_{\substack{\shortparallel \\ f(u) \\ \shortparallel \\ e_i}} = f(e_i)$$

Donc $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, on a bien $f(e_i) = e_i$.

Soit $i \in \{p+1, \dots, p+q\}$, on a $f(e_i) = 0$ par déf. car $e_i \in \operatorname{Ker} f$

Donc la matrice de f dans la base $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$ est :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_{p+q} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & \dots & e_p & e_{p+1} & \dots & e_{p+q} \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & 0 & & & & \\ 0 & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & & & & & \end{matrix} \right) \end{array}$$

Exercice 2 : $\mathbb{R}^3$

jeudi 28 janvier 2021 11:16

1) éq. cartésienne du plan vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que u et v sont non colinéaires donc ils engendrent bien un plan.

1ère méthode : $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(u, v)$

Donc tout vecteur $w \in \mathcal{P}$ s'écrit comme combinaison linéaire de u et v.

Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$. $w = au + bv$

$$\begin{cases} x = b \\ y = 2a - b \\ z = a \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2a - x \\ z = a \end{cases}$$

$$\iff \boxed{y = 2z - x}$$

2ème méthode : On calcule un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$.

$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Tout vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ satisfait $\vec{w} \cdot n = 0$

car $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{x + y - 2z = 0}$$

② P plan // à $\mathcal{P}$ et passe par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$. Alors $\vec{AC} \in P$. $\vec{AC} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à P, donc $\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{AC} \cdot \vec{n} = (x-1) + y - 2(z-1) = 0$ $\quad \boxed{x + y - 2z = -1}$

$\vec{AC}.\vec{n} = (x-1) + y - 2(z-1) = 0$ $\boxed{x + y - 2z = -1}$

③ Soit P' le plan // à P et contenant le point $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

jeudi 28 janvier 2021 12:37

Le vecteur normal $\vec{n}$ à P est aussi normal à P'.

Soit $D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P'$. Alors $\overrightarrow{BD} \in P'$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = 0$

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = x + (y-1) - 2z = 0$

$$\boxed{x + y - 2z = 1}$$

④ (Rappel : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix}$)

Du coup, le milieu de $[AB]$ pour $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le point C de coordonnées $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

(Rappel : Tous les plans parallèles à un plan d'équation
$ax + by + cz = d$
ont une équation de la forme $ax + by + cz = d'$
avec $d' \in \mathbb{R}$)

Soit P'' le plan parallèle à P passant par $C \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

P'' a pour équation $x + y - 2z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

On a juste à déterminer la valeur de d.

$C \in P''$ donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = d = 0$.

L'équation de P'' est donc $\underline{x + y - 2z = 0}$

Exercice 3 : K corps, V un K-e.v.

jeudi 28 janvier 2021 12:58

$f : V \to V$ tq v et $f(v)$ colinéaires $\forall v \in V$.

① $\forall v \in V, \exists \alpha \in K, f(v) = \alpha v$

② Une homothétie vectorielle est une application linéaire qui multiplie tous les vecteurs par une constante $\beta \in K^*$

$\exists \beta \in K^*, \forall v \in V, f(v) = \beta v$

③ Mq soit $f = 0$ soit f homothétie.

- Si $f = 0$, on a bien $\forall v \in V$, $f(v) = 0$
$= 0 . v$
- Supposons maintenant que $f \neq 0$ vérifie ①. Mq f homothétie.

Soit $v_0 \in V$. On a $f(v_0) = \alpha_0 v_0$ pour un certain $\alpha_0 \in K$.

On veut montrer que pour tout $v_1 \in V$, alors $f(v_1) = \alpha_0 v_1$ pour le même α_0.

* Soit $v_1 \in V$ colinéaire à v_0, c.a.d. $v_1 = k v_0$ avec $k \in K$.

On a $f(v_1) = f(k v_0) = k f(v_0)$

$= k \alpha_0 v_0$ (car $f(v_0) = \alpha_0 v_0$)

$= \alpha_0 v_1$ (car $v_1 = k v_0$)

* Soit $v_1 \in V$ non colinéaire à v_0. On note $f(v_1) = \alpha_1 v_1$.

On veut m.q. $\alpha_1 = \alpha_0$.

Calculons $f(v_0 + v_1) = f(v_0) + f(v_1)$

$= \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1$

D'autre part $f(v_0 + v_1) = \alpha_2 (v_0 + v_1)$ avec $\alpha_2 \in K^*$.

Donc $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 = \alpha_2 (v_0 + v_1)$

$\iff (\alpha_0 - \alpha_2) v_0 + (\alpha_1 - \alpha_2) v_1 = 0$

(v_0, v_1) est une famille libre donc $\alpha_0 - \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

(v_0, v_1) est une famille libre donc $\alpha_0 - \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

Donc $\underline{\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2}$. $\square$

Exercice 5 : $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

lundi 1 février 2021 19:18

(1) $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \overline{-2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \overline{-1} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_7)$

mq. A inversible.

Th. du rang : $3 = \dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A)$

A est inversible $\Leftrightarrow A$ isomorphisme $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} A) = 3 \Leftrightarrow \dim(\ker A) = 0$

1ère méthode : mq $\ker A = \{0\}$.

Calculons $\ker A$. $(x,y,z) \in \ker A$ ssi

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \overline{-2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \overline{-1} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-2z \\ 2x+y+z \\ -x+3z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x+y-2z = 0 \\ 2x+y+z = 0 \\ -x+3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ -y+5z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ -y+5z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ donc A inversible

$\bar{6} \times \bar{6} = \overline{36} = \bar{1}$ $\qquad 36 = 5 \times 7 + 1 \Rightarrow \overline{36} = \bar{1}$

2ème méthode : $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \overline{-2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \overline{-1} & \bar{0} & \bar{3} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne

$$= \overline{-1} \begin{vmatrix} \bar{1} & \overline{-2} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{vmatrix} + \bar{3} \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{vmatrix}$$

$$= \overline{-3} - \bar{3} = \overline{-6} = \bar{1} \neq 0$$

jeudi 4 février 2021 10:55

② $B = \begin{pmatrix} \bar{0} & -\bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & -\bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_7)$

On calcule à nouveau $\operatorname{Ker} B$ et on montre cette fois-ci qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$.

$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} B$ ssi $\begin{cases} -y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ -y + \cancel{8}\,1z = 0 \end{cases}$ $L_1 = L_3$ donc $\operatorname{Ker} B \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 2y \end{cases}$

$\operatorname{Ker} B = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{F}_7 \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\operatorname{Ker} B$.

$3 = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} B}_{1} + \dim \operatorname{Im} B \Rightarrow \dim \operatorname{Im} B = 2$

Les colonnes de B appartiennent à $\operatorname{Im} B$

Les deux premières colonnes : $\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes, ils forment donc une base de $\operatorname{Im} B$.

dans $\mathbb{F}_7$, $\bar{7} = \bar{0}$

$2 \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} \\ -\bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$

Exercice 6 : Soit p premier. On se place dans le plan $\mathbb{F}_p^2$.

jeudi 4 février 2021 11:16

(1) Une droite vectorielle de $\mathbb{F}_p^2$ est un s.e.v. de dim. 1.

Elle a une base qui est un vecteur de $\mathbb{F}_p^2 \neq (0,0)$.
(x,y)

Il y a $\underline{p^2-1}$ vecteurs non nuls (x,y).
(p choix pour x, p choix pour y, on enlève $(0,0)$)

Mais si (x,y) et (x',y') sont colinéaires, ils engendrent la même droite.

Dans $\mathbb{F}_p^2$, il y a $p-1$ vecteurs colinéaires à un vecteur particulier (x,y) : (x,y), $2(x,y)$, $3(x,y)$, ..., $(p-1)(x,y)$ et ils engendrent tous la même droite.

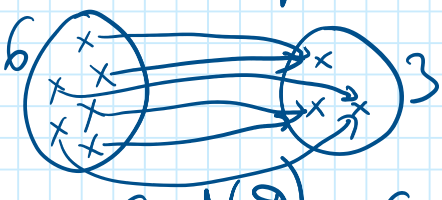
Au final, il y a $\dfrac{p^2-1}{p-1} = p+1$ droites vectorielles dans $\mathbb{F}_p^2$.

(2) Soit f l'application $f : \begin{array}{rcl} \{(a,b,c) \in \mathbb{F}_p^3 \mid (a,b) \neq (0,0)\} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (a,b,c) & \longmapsto & ax+by+c=0 \end{array}$

$\mathcal{D} = \{\text{droites affines de } \mathbb{F}_p^2\}$

f est bien surjective car n'importe quelle droite de $\mathcal{D}$ d'équation $ax+by+c=0$, $(a,b) \neq (0,0)$ a bien un antécédent par f : (a,b,c). On va même voir qu'il y a en fait plusieurs antécédents.

Soit $d \in \mathcal{D}$ une droite d'équation $ax+by+c=0$.
Alors d a $p-1$ antécédents par f : (a,b,c)
$(2a, 2b, 2c)$
$\vdots$
$((p-1)a, (p-1)b, (p-1)c)$



Donc $\mathrm{Card}(\mathcal{D}) = \dfrac{\mathrm{Card}\left(\{(a,b,c) \in \mathbb{F}_p^3 \mid (a,b) \neq (0,0)\}\right)}{p-1}$

$$= \frac{\overset{\text{choix de } c}{p}\,\overbrace{(p^2-1)}^{\text{choix pour } (a,b)\neq(0,0)}}{p-1}$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{n-1}$$

$$= n(n+1) .$$

③ Soit g l'application $g : \mathbb{F}_p^2 \times (\mathbb{F}_p^2 \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathcal{D}$

$(A, v) \longmapsto A + \mathbb{F}_p v$

jeudi 4 février 2021 11:50

(A est un point et v un vecteur non nul)

Comme dans la question précédente, l'application g est surjective.
Soit $A + \mathbb{F}_p v \in \mathcal{D}$. Calculons tous les antécédents de $A + \mathbb{F}_p v$ par g.

* (A, v) est clairement un antécédent de $A + \mathbb{F}_p v$. 1

* Soit $(B, w) \neq (A, v)$ tq $g(B, w) = A + \mathbb{F}_p v$.

On a donc $B + \mathbb{F}_p w = A + \mathbb{F}_p v$.

- si $v = w$, alors $B + \mathbb{F}_p v = A + \mathbb{F}_p v$

donc $B = A + kv$ avec $k \in \mathbb{F}_p^*$ $p-1$

- si $v \neq w$, alors $\begin{cases} v = k'w & \text{avec } k' \neq \bar{0}, \bar{1} \\ B = A + k''v & \text{avec } k'' \in \mathbb{F}_p \end{cases}$ $(p-2)p$

Nombre de choix total : $1 + p - 1 + (p-2)p = (p-1)p$

Une droite $A + \mathbb{F}_p v \in \mathcal{D}$ a $(p-1)p$ antécédents par g.

$$\mathrm{Card}(\mathcal{D}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathbb{F}_p^2 \times (\mathbb{F}_p^2 \setminus \{0\}))}{(p-1)p}$$

$$= \frac{p^2(p^2-1)}{(p-1)p} = (p+1)p.$$

<u>Autre méthode</u> : Un choix de droite affine correspond à un choix de :

- un vecteur directeur
- un point de la droite