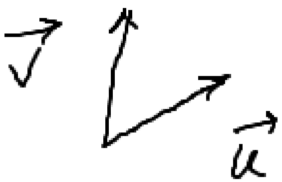
Rappel : angles géométriques (= non orientés)

$\vec{E}$ espace vectoriel euclidien

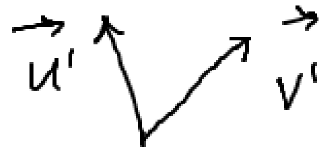
$$\boxed{\widehat{\vec{u},\vec{v}} \overset{\text{déf}}{=} \theta}$$

$\exists ?\, f$ isométrie tq



$f(\vec{u})=\vec{u}'$

$f(\vec{v})=\vec{v}'$



$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$ $\qquad$ $\|\vec{u}'\|=\|\vec{v}'\|=1$

$0 \leq \theta, \theta' \leq \pi$

C'est le cas ssi $(\vec{u}|\vec{v})=(\vec{u}'|\vec{v}')$ ssi $\theta=\theta'$

$(\vec{u}|\vec{v})=\cos\theta$

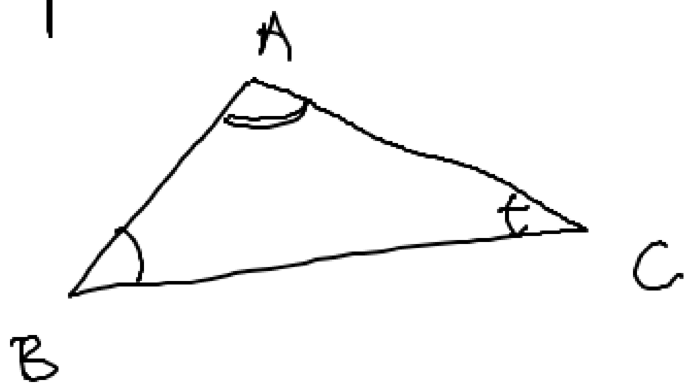
$(\vec{u}'|\vec{v}')=\cos\theta'$

$|(\vec{u}|\vec{v})| \leq \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| = 1$ (Cauchy-Schwarz) donc

Plus généralement : $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls

$$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \overset{\text{def}}{=} \widehat{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

$\mathcal{E}$ plan euclidien



$\hat{A} = \widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}$ etc.

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi}$$

Cas d'isométrie des triangles

$\exists ! f$ isométrie tq $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$

Si f existe, alors $A'B'=AB$, $A'C'=AC$ et $B'C'=BC$, $\hat{A'}=\hat{A}$, $\hat{B'}=\hat{B}$ et $\hat{C'}=\hat{C}$) préservation du produit scalaire par $\vec{f}$.

Premier cas d'isométrie

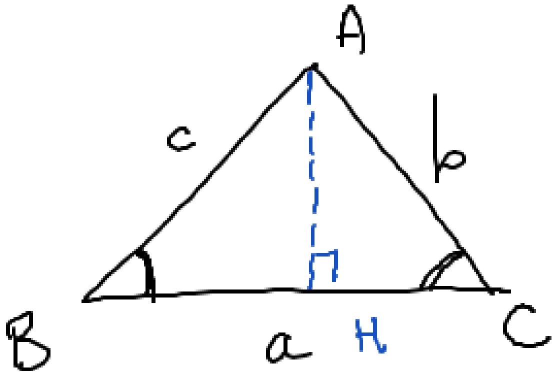
Si $A'B'=AB$, $A'C'=AC$ et si $\hat{A'}=\hat{A}$, alors il existe f isométrie tq $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$. [Dém.: fin du cours précédent]

Deuxième cas d'isométrie

Si $A'B' = AB$, $\hat{A'} = \hat{A}$ et $\hat{B'} = \hat{B}$, alors $A'B'C'$ et ABC sont isométriques.

Preuve : réduction au premier cas.

Loi des sinus



$$\boxed{\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}}$$

$$\frac{AH}{AB} = \sin \hat{B} \quad \text{et} \quad \frac{AH}{AC} = \sin \hat{C}$$

donc

$AB \sin \hat{B} = AC \sin \hat{C}$

$c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C}$

donc

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \quad \square$$

Hyp $\quad c' = c$, $\hat{A}' = \hat{A}$, $\hat{B}' = \hat{B}$

$$\pi = \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \qquad \text{donc} \qquad \hat{C}' = \hat{C}.$$

$$\frac{a'}{c'} = \frac{\sin \hat{A}'}{\sin \hat{C}'} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} = \frac{a}{c} \qquad \text{donc} \quad a' = a, \quad \text{i.e.} \quad B'C' = BC.$$

Maintenant, on a $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $\hat{B}' = \hat{B}$, donc ABC sont isométriques d'après le premier cas. $\square$

Troisième cas d'isométrie

Si $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ et $B'C' = BC$, alors ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Preuve : réduction au premier cas

Al Kashi :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(\vec{AB}|\vec{AC})$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2\, AB.AC.\cos(\hat{A})$$

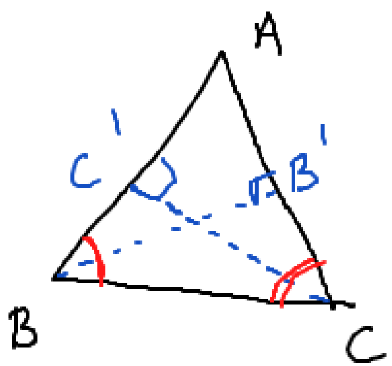
On a donc $\cos(\hat{A'}) = \dfrac{B'C'^2 - (A'B'^2 + A'C'^2)}{2A'B'.A'C'} = \dfrac{BC^2 - (AB^2 + AC^2)}{2AB \cdot AC} = \cos\hat{A}$

et $\hat{A'} = \hat{A}$. □

Exemple d'utilisation

Ces énoncés garantissent l'existence d'une isométrie sans avoir besoin de l'expliciter

(Cf. Feuille 8, ex 4)



ABC triangle non plat

$h_B = (BB')$, $h_C = (CC')$

Fait. Si $BB' = CC'$, alors ABC est isocèle en A.

On va prouver $\hat{B} = \hat{C}$. Pour cela, on va établir que les triangles $BB'C$ et $CC'B$ sont isométriques.

$BB' = CC'$, $BC = BC$ et $BC' = \sqrt{BC^2 - CC'^2} = \sqrt{BC^2 - B'B^2} = B'C$ (Pythagore)

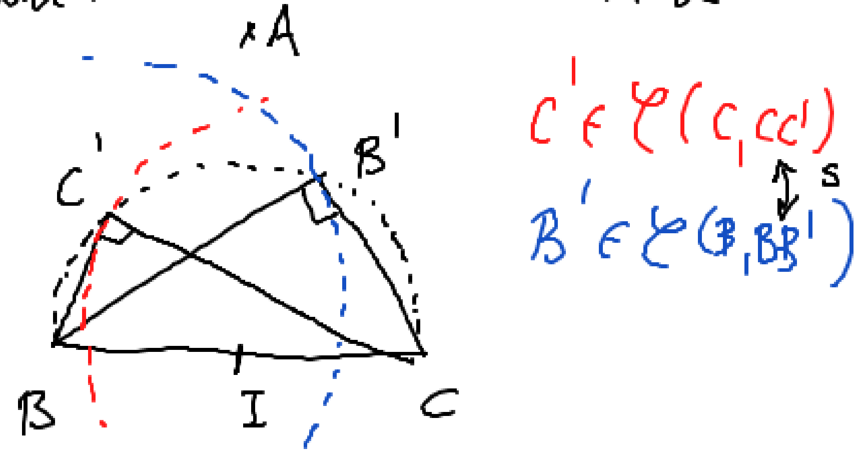
D'après le troisième cas d'isométrie, il existe une isométrie f telle que $f(B') = C'$, $f(B) = C$ et $f(C) = B$.

Comme f préserve les angles géométriques, $\hat{C} = f(\hat{B}) = \hat{B}$. $\square$

On peut essayer de donner une démonstration reposant sur un choix explicite de f.

Soit s la réflexion par rapport à la médiatrice de $[BC]$. On a $s(B) = C$. Prouvons $s(B') = C'$!

B', C' appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$. On a $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.



B' est le point de $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}(B, BB')$ du côté de A

C' " " " " $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}(C, CC')$ " " "

donc $s(B')$ est le point de $\underbrace{s(\mathcal{C}) \cap s(\mathcal{C}(B, BB'))}_{= \mathcal{C} \cap \mathcal{C}(C, CC')}$ du côté de A

et ainsi $s(B') = C'$.

Conclusion : $\hat{B} = \widehat{C'BC} \xrightarrow{s} \widehat{B'CB} = \hat{C}$

et donc $\hat{B} = \hat{C}$. $\square$

La première dém. paraît plus efficace que la seconde ...

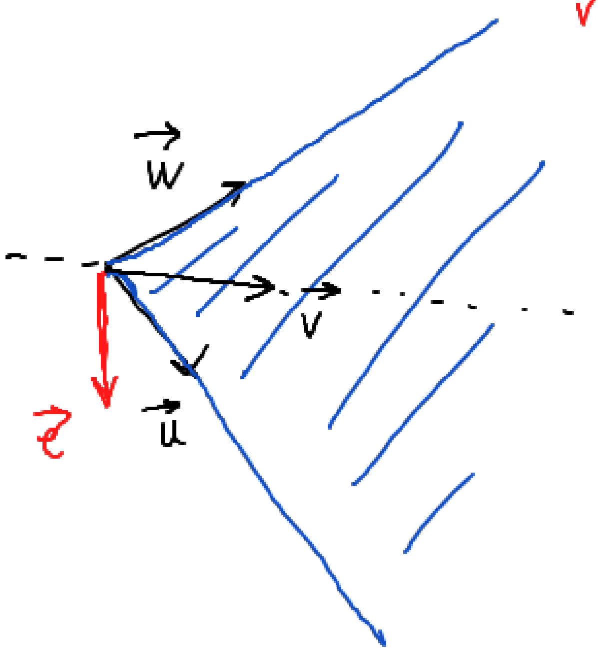
Retour sur la relation de Chasles

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$.

Prop – Si $\vec{v}$ est $\boxed{\text{entre}}$ $\vec{u}$ et $\vec{w}$, alors $\widehat{\vec{u},\vec{v}} + \widehat{\vec{v},\vec{w}} = \widehat{\vec{u},\vec{w}}$.

$\Updownarrow$

$\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{u} + \mathbb{R}_{\geq 0}\vec{w}$



Dém. L'hypothèse faite sur $\vec{v}$ garantit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont de part et d'autre de la droite $\mathbb{R}\vec{v}$.

Soit $\vec{e}$ unitaire tq. $(\vec{e}|\vec{v}) = 0$ et $(\vec{e}|\vec{u}) \geq 0$.

On a donc $(\vec{e}|\vec{w}) \leq 0$.

On travaille dans la b.o.n. $(\vec{v}, \vec{e})$

$$\vec{u} = (\vec{u}|\vec{v})\vec{v} + (\vec{u}|\vec{e})\vec{e}$$

$$= (\cos\theta)\vec{v} + (\sin\theta)\vec{e}$$

$$\theta = \widehat{\vec{u},\vec{v}} \in [0,\pi]$$

$$1 = \|\vec{u}\|^2 = (\vec{u}|\vec{v})^2 + (\vec{u}|\vec{e})^2$$

$$1 = (\cos\theta)^2 + (\vec{u}|\vec{e})^2$$

donc $(\vec{u}|\vec{e})^2 = (\sin\theta)^2$

et $(\vec{u}|\vec{e}) = \sin\theta$

car $(\vec{u}|\vec{e}) \geq 0$ et $\sin\theta \geq 0$.

$$\vec{w} = (\vec{w}|\vec{v})\vec{v} + (\vec{w}|\vec{e})\vec{e}$$

$$= (\cos\theta')\vec{v} - (\sin\theta')\vec{e}$$

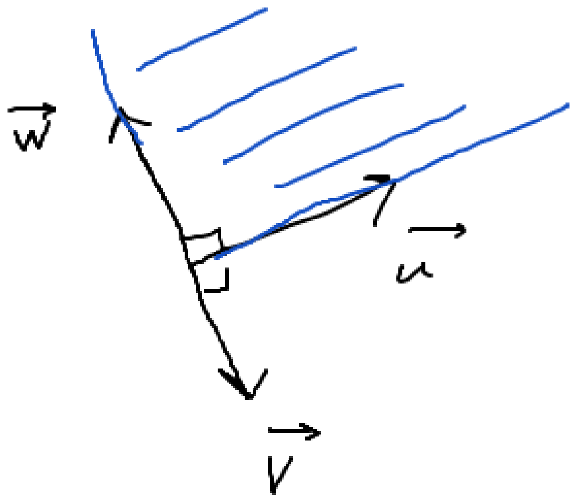
car $(\vec{w}|\vec{e}) \leq 0$!

$$\theta' = \widehat{\vec{v},\vec{w}} \in [0,\pi]$$

$$(\vec{u}|\vec{w}) = (\cos\theta)(\cos\theta') - (\sin\theta)(\sin\theta')$$

$$= \cos(\theta+\theta'),$$ donc $\widehat{\vec{u},\vec{w}} = \theta + \theta' = \widehat{\vec{u},\vec{v}} + \widehat{\vec{v},\vec{w}}$. $\square$

Rq Faux sans l'hypothèse sur la position de $\vec{v}$.



$$\widehat{\vec{u},\vec{v}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{\vec{v},\vec{w}} = \pi$$

$$\widehat{\vec{u},\vec{w}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{\vec{u},\vec{w}} \neq \widehat{\vec{u},\vec{v}} + \widehat{\vec{v},\vec{w}} \quad !$$

Angles orientés dans le plan.

[Réf : TD7, ex 2, q. 6]

$\vec{\mathcal{E}}$ espace vectoriel euclidien de dim 2

dét $(f)=1$ dét $(f)=-1$

$$O(\vec{\mathcal{E}}) = \{\text{isométries de } \vec{\mathcal{E}}\} = O^+(\vec{\mathcal{E}}) \sqcup O^-(\vec{\mathcal{E}})$$

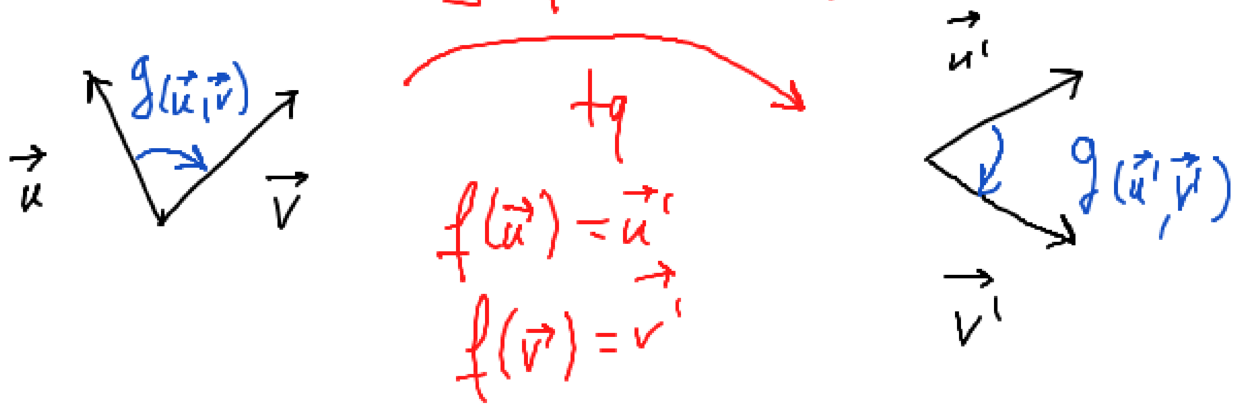
$O^+(\vec{\mathcal{E}}) = \{ f \in O(\vec{\mathcal{E}}) \mid \det(f) = 1 \}$ (Rotation)

$O^-(\vec{\mathcal{E}}) = \{ f \in O(\vec{\mathcal{E}}) \mid \det(f) = -1 \}$ (Réflexions, en dim 2)

$f \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ Dans une b.o.n, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

$\|\vec u\| = \|\vec v\| = \|\vec{u}'\| = \|\vec{v}'\| = 1$

$\exists!\, f \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$



tq $f(\vec u) = \vec{u}'$, $f(\vec v) = \vec{v}'$

<u>Fait</u> : il existe une unique rotation $g_{(\vec u, \vec v)} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ telle que

$$g_{(\vec u, \vec v)}(\vec u) = \vec v.$$

<u>Preuve</u> – On considère une b.o.n. $(\vec u, \vec e)$

$\vec v = a\vec u + b\vec e$

Si $g \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$, $g(\vec u) = \vec v \iff \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} a & * \\ b & * \end{pmatrix}$

Il existe une unique telle rotation. $\square$

Prop — Il existe $f \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ tq. $f(\vec{u}) = \vec{u'}$ et $f(\vec{v}) = \vec{v'}$

ssi $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{u'}, \vec{v'})$.

Preuve

CN Supp. $f \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ tq. $f(\vec{u}) = \vec{u'}$, $f(\vec{v}) = \vec{v'}$!

$f^{-1} \circ g(\vec{u'}, \vec{v'}) \circ f \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$

donc $f^{-1} \circ g(\vec{u'}, \vec{v'}) \circ f = g(\vec{u}, \vec{v})$.

Or $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ est commutatif (TD7), donc $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{u'}, \vec{v'})$.

CS - On suppose $g(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{u'},\vec{v'})$.

$\|\vec{u}\| = \|\vec{u'}\| = 1$, donc il existe une unique rotation $f \in O^+(\vec{\varepsilon})$ tq. $f(\vec{u}) = \vec{u'}$.

$$\left(f = g(\vec{u},\vec{u'}) \right).$$

$$f(\vec{v}) = f \circ g(\vec{u},\vec{v})\,(\vec{u}) \underset{\substack{\uparrow \\ O^+(\vec{\varepsilon}) \text{ commutatif}}}{=} g(\vec{u},\vec{v}) \circ f\,(\vec{u}) = g(\vec{u'},\vec{v'}) \circ f(\vec{u})$$

$$= g(\vec{u'},\vec{v'})(\vec{u'})$$

$$= \vec{v'}$$

On a bien $f(\vec{u}) = \vec{u'}$, $f(\vec{v}) = \vec{v'}$.

$\square$