Expression complexe des isométries planes

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ affine et telle que $\vec{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ soit une isométrie vectorielle.

1) Isométries vectorielles

On sait que $\vec{f}$ est soit une rotation (si $\det(\vec{f}) = +1$) (cf TD n°1)
soit une réflexion (si $\det(\vec{f}) = -1$)

(i) Rotations

$\vec{f}$ est une rotation vectorielle

$$\boxed{\vec{f}(z) = e^{i\theta} \cdot z}$$

$(1, i)$ base orthonormée directe

$$\mathrm{Mat}_{(1,i)}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ avec θ uniquement défini modulo 2π.

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}(1) &= \cos\theta \cdot 1 + \sin\theta \cdot i = e^{i\theta} \cdot 1 \\ \vec{f}(i) &= -\sin\theta \cdot 1 + \cos\theta \cdot i = e^{i\theta} \cdot i \end{aligned}\right\}$$

on en déduit :

$$\vec{f}(z) = \vec{f}(a \cdot 1 + b \cdot i) = a\vec{f}(1) + b\vec{f}(i)$$
$$= a e^{i\theta} \cdot 1 + b e^{i\theta} \cdot i = e^{i\theta} \cdot z$$

(ii) Réflexions vectorielles

$\vec{f}$ isométrie de déterminant -1

$$\mathrm{Mat}_{(1,i)}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

donc $\vec{f}(1) = e^{i\theta}.1$

$\vec{f}(i) = \sin\theta.1 - \cos\theta.i = e^{i\theta}.(-i)$

donc, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\vec{f}(z) = \vec{f}(a.1 + b.i) = a\vec{f}(1) + b\vec{f}(i)$$
$$= a e^{i\theta}.1 + b e^{i\theta}(-i)$$
$$= e^{i\theta}(a - bi) = e^{i\theta}\bar{z}$$

$$\boxed{\vec{f}(z) = e^{i\theta}\bar{z}}$$

Mieux : construction d'une base adaptée à $\vec{f}$.

On cherche $z \neq 0$ tel que $\vec{f}(z) = z$, c'est-à-dire $e^{i\theta}\bar{z} = z$.

$z = \rho e^{i\alpha}$, $\rho = |z|$

$$e^{i\theta}\bar{z} = z \iff e^{i\theta}e^{-i\alpha} = e^{i\alpha} \iff e^{2i\alpha} = e^{i\theta}$$
$$\iff 2\alpha \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

Posons $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ et

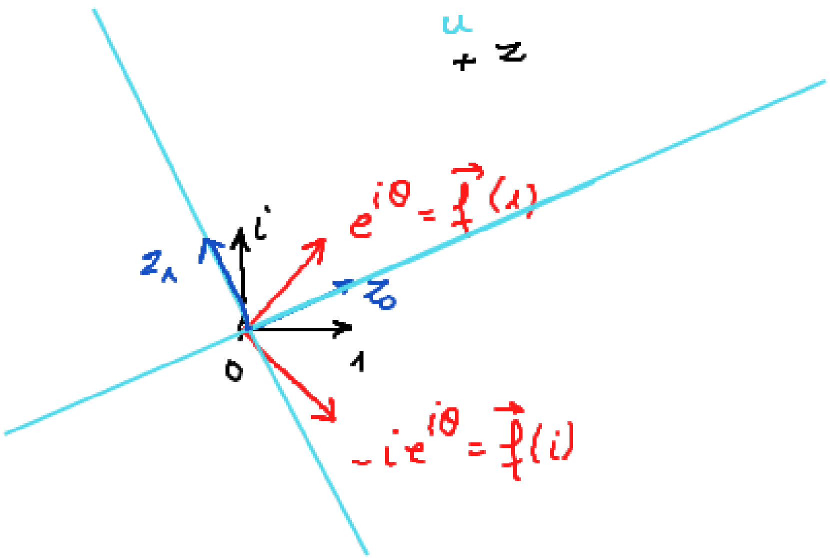
$$z_0 = e^{i\alpha} = e^{i\theta/2} \qquad \vec{f}(z_0) = z_0$$

$$\|z_0\| = |z_0| = 1$$

Base orthonormée directe : (z_0, z_1) avec $z_1 = iz_0$.

On a $\vec{f}(z_1) = \vec{f}(iz_0) = e^{i\theta}\overline{(iz_0)} = -i\cdot(e^{i\theta}\bar{z}_0) = -i\,\vec{f}(z_0) = -iz_0 = -z_1$.

Dans la base (z_0, z_1), la matrice de $\vec{f}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



Formulation complexe du changement de base :

$$z = e^{i\theta/2}\cdot u \qquad u \in \mathbb{C}$$

$$\vec{f}(z) = e^{i\theta/2}\vec{\varphi}(u) \qquad \vec{\varphi} : \text{expression de } \vec{f} \text{ dans } (z_0, z_1)$$

$$\parallel$$

$$e^{i\theta}\bar{z} = e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta/2}\,\bar{u} = e^{i\theta/2}\,\bar{u}$$

$$\boxed{\vec{\varphi}(u) = \bar{u}}$$

2) Isométries affines

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ affine, $\vec{f}$ isométrie.

(i) Isométries directes (= déplacements) : $\vec{f}$ est une rotation.

$$f(z) = f(0) + \vec{f}(z) = b + e^{i\theta} z = az + b \ , \text{ avec } |a| = 1 .$$

Existe-t-il un point fixe ? $f(z) = z \iff az + b = z \iff (a-1)z = -b$.

* Si $a = 1$ et $b = 0$: tous les points sont fixes $\boxed{f = id_{\mathbb{C}}}$
* Si $a = 1$ et $b \neq 0$: aucun point fixe, $\boxed{f = t_b}$ (translation)
* Si $a \neq 1$: un unique point fixe, $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = f(\omega) + \vec{f}(z-\omega)$$
$$= \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$$

$$\boxed{f = Rot(\omega, \theta)}$$

(rotation de centre ω et d'angle θ).

(ii) Isométries indirectes : $\vec{f}$ est une réflexion.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(0) + \vec{f}(z) = b + a\bar{z}$ avec $|a| = 1$.

Changement de base $a = e^{i\theta}$ $\quad z = e^{i\theta/2}u$ $\quad \vec{f}(z) = e^{i\theta/2}\vec{\varphi}(u)$

avec $\vec{\varphi}(u) = \bar{u}$.

$f(z) = e^{i\theta/2}\left(\vec{\varphi}(u) + e^{-i\theta/2}b\right)$, donc $\boxed{\varphi(u) = \bar{u} + b'}$ avec $b' = e^{-i\theta/2}b$

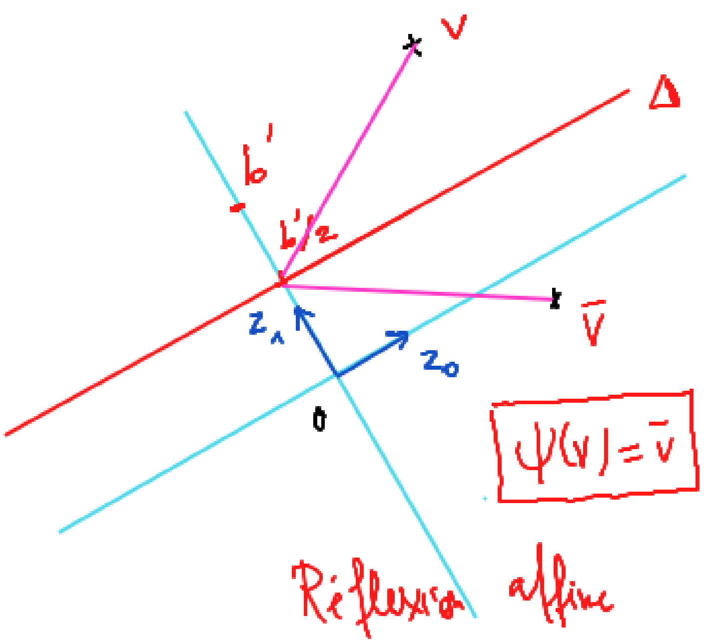
Recherche d'un point fixe.

$$\varphi(u) = u \iff \bar{u} + b' = u \iff u - \bar{u} = b'.$$

$$\iff 2i\,\mathrm{Im}(u) = b'.$$

* Cas $b' \in i\mathbb{R}$. On écrit $b' = i\beta$

Les points fixes de φ sont les nombres complexes de partie imaginaire $\beta/2$.



$$\Delta = \frac{b'}{2} + \mathbb{R}\cdot 1 \qquad (\text{repère } (0; z_0, z_1))$$

$$u = \frac{b'}{2} + v \qquad (\text{origine en } b'/2)$$

$$\varphi(u) = \frac{b'}{2} + \psi(v)$$

$$\psi(v) = \varphi\left(\frac{b'}{2} + v\right) - \frac{b'}{2} = \overline{\frac{b'}{2}} + \bar{v} + b' - \frac{b'}{2} = \bar{v}$$

* Cas où $b' \notin i\mathbb{R}$

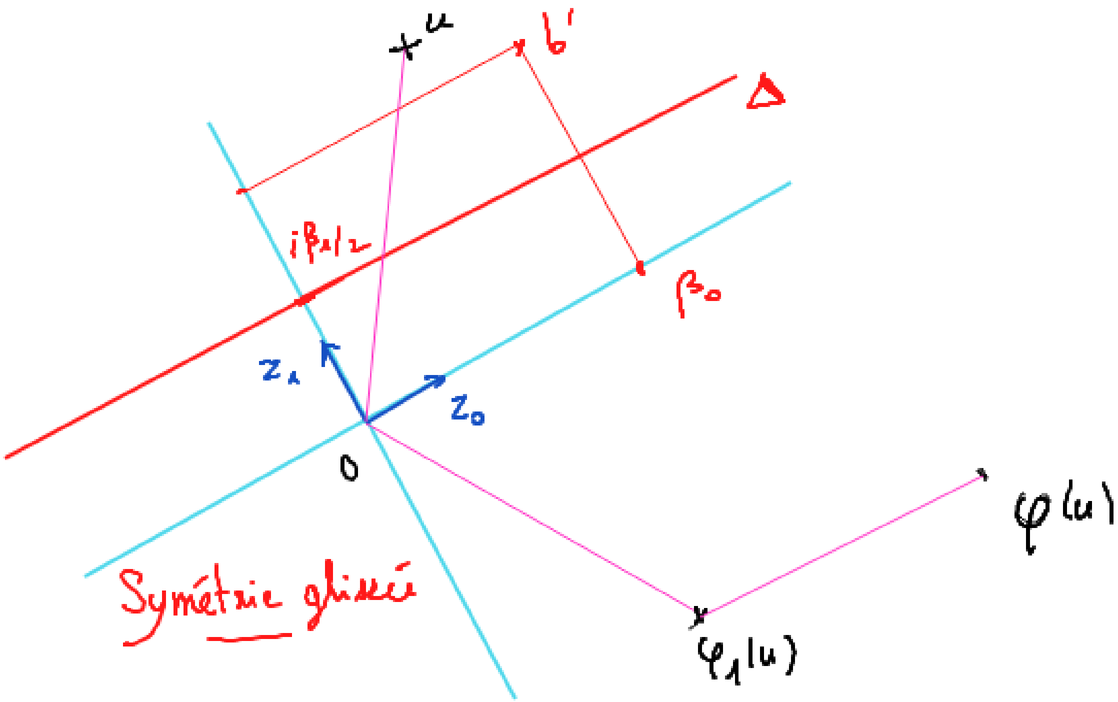
$\varphi(u) = \bar{u} + b'$

φ n'a aucun point fixe

$b' = \beta_0 + i\beta_1 \qquad \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}, \quad \beta_0 \neq 0.$

$\varphi(u) = (\bar{u} + i\beta_1) + \beta_0 = \varphi_1(u) + \beta_0$

φ_1 est la réflexion par rapport à la droite $\Delta = \frac{i\beta_1}{2} + \mathbb{R}$



$$\boxed{\varphi = t_{\beta_0} \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ t_{\beta_0}}$$

$\varphi_1 \circ t_{\beta_0}(u) = \varphi_1(u + \beta_0) = \overline{(u + \beta_0)} + i\beta_1$

$= \bar{u} + \beta_0 + i\beta_1$

$= t_{\beta_0} \circ \varphi_1(u).$

Récapitulatif

Isométries affines d'un plan affine euclidien $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} \simeq \mathbb{C}$ via le choix d'une b.o.n. de $\mathcal{E}$)

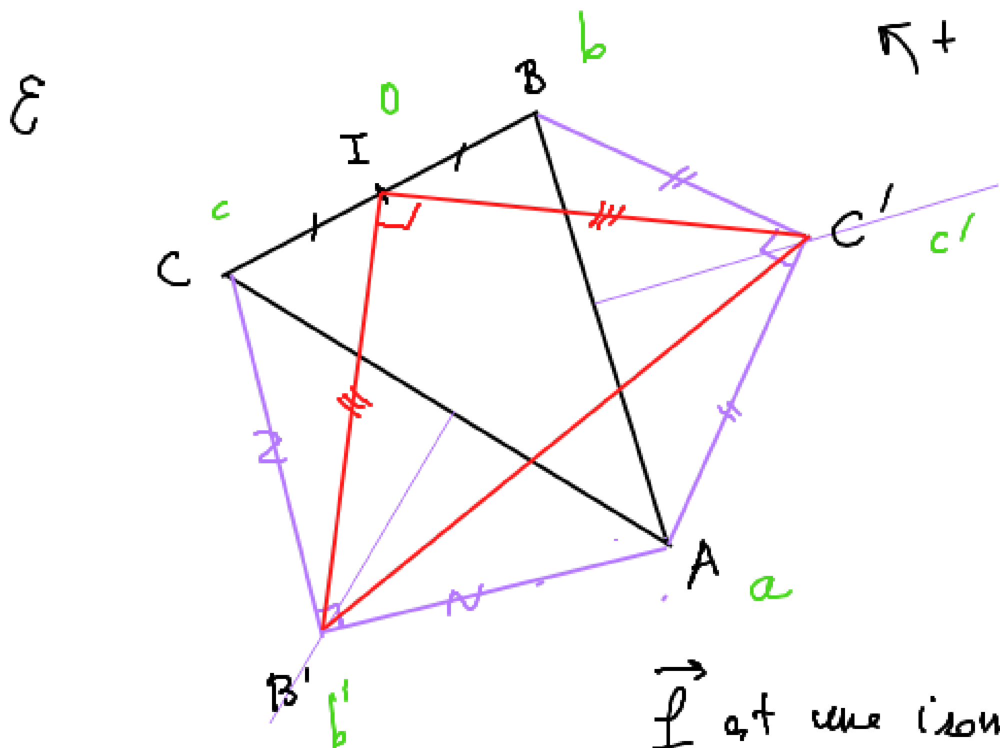
* $\mathrm{Fix}(f) = \mathcal{E}$: $f = id_{\mathcal{E}}$ directe

* $\mathrm{Fix}(f) = \Delta$, une droite : f est la réflexion par rapport à Δ indirecte

* $\mathrm{Fix}(f) = \{\Omega\}$, un point : f est une rotation de centre Ω directe

* $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$:
  - f est une translation directe
  - f est une symétrie glissée indirecte

Une (autre) application des nombres complexes



On choisit une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de $\vec{\mathcal{E}}$. On considère l'application affine

$f : \mathbb{C} \to \mathcal{E}$ telle que

$f(0) = I$, $\vec{f}(1) = \vec{e}_1$, $\vec{f}(i) = \vec{e_2}$

$\vec{f}$ est une isométrie

$A = f(a)$

$B = f(b)$

$C = f(c)$

$\left.\begin{matrix} B = f(b) \\ C = f(c) \end{matrix}\right\} b + c = 0$

$B' = f(b')$

$C' = f(c')$

$AB'C$ rectangle isocèle en B' :

$Rot(B', \frac{\pi}{2})(A) = C$, donc

$c = b' + i(a - b')$

i.e. $(1-i)b' = c - ia$

$b' = \frac{1}{2}\left[(1-i)a + (1+i)c\right]$

$A = \mathrm{Rot}\left(C', \frac{\pi}{2}\right)(B)$, donc

$$a = c' + i(b - c')$$

i.e. $\quad (1-i)c' = ib - a$

et $\quad c' = \frac{1}{2}\left[-(1+i)a + (-1+i)b\right].$

$$b' = \frac{1}{2}\left[(1-i)a + (1+i)c\right] = \frac{1}{2}\left[(1-i)a - (1+i)b\right] \qquad (c = -b)$$

Finalement: $\quad -ib' = -\frac{1}{2}\left[(1+i)a - (i-1)b\right] = -\frac{1}{2}\left[(1+i)a - (-1+i)b\right] = c'$

donc $\quad C' = \mathrm{Rot}\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)(B')$. Le triangle $B'OC'$ est rectangle isocèle en O.