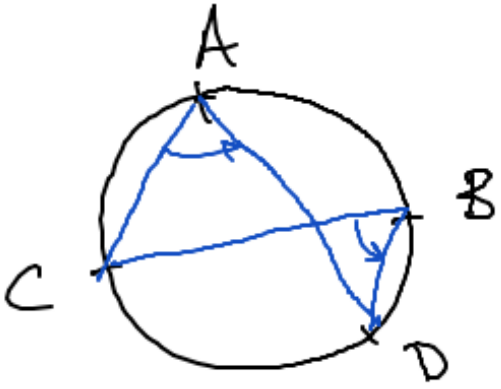
Critère de cocyclicité



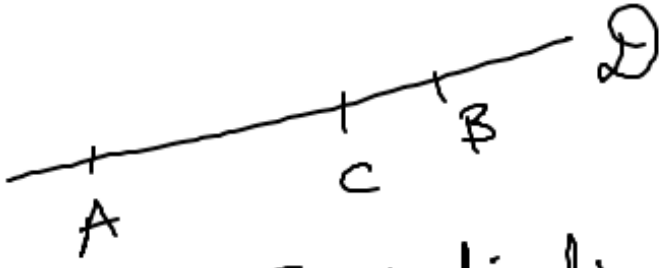
A, B, C, D quatre pts $\neq$

A, B, C, D sont cocycliques ou alignés ssi

$$\mathcal{L}(\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}}) = \mathcal{L}(\widehat{\vec{BC}, \vec{BD}}).$$

Démonstration

1) Supposons A, B, C alignés $\qquad \mathcal{D} = (AB)$

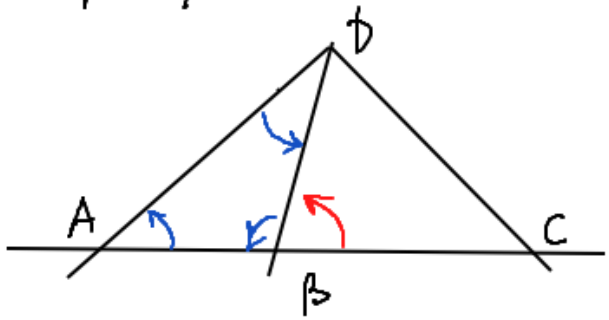


$D \in \mathcal{D} \iff (\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}})$ nul ou plat

$\iff \mathcal{L}(\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}})$ nul.

En particulier, si $D \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{L}(\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}}) =$ angle nul $= \mathcal{L}(\widehat{\vec{BC}, \vec{BD}})$.

Réciproquement, supposons $\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) = \mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}})$.



Dans le triangle ABD : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) + (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}}) =$ angle plat

En écrivant $(\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}})$ [mod. angle plat]

et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}})$ [mod. angle plat],

il vient :

$$(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}}) - (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) \quad \text{[mod. angle plat]}.$$

Notre hypothèse permet de conclure : $\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = 0$, donc $D \in (AB)$ et les quatre points A, B, C, D sont alignés.

2. On suppose A, B et C non alignés.

Il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ tel $A, B, C \in \mathcal{C}$. Soit O le centre de $\mathcal{C}$.

Si $D \in \mathcal{C}$, alors $\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}})$

d'après le thm de l'angle au centre.

Réciproquement, on suppose $\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) = \mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}})$.

(i) $\left.\begin{matrix} A, C, D \\ B, C, D \end{matrix}\right)$ ne sont pas alignés.

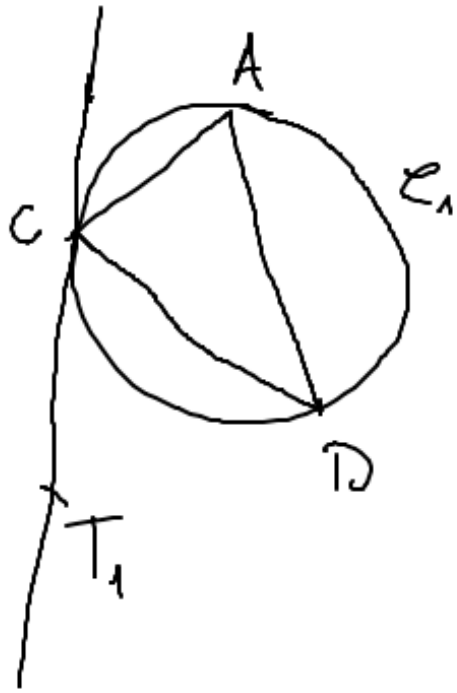
Sinon, si A, C, D sont alignés par exemple, alors $\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) = 0$, donc $\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}}) = 0$ et B, C, D sont alignés. Les deux dtes qui apparaissent sont les mêmes, c'est (CD), et donc A, B, C sont alignés.

Soit $\mathcal{C}_1$ l'unique cercle passant par A, C et D

Soit $\mathcal{C}_2$ l'unique cercle passant par B, C, D.

But : $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

(ii)



$$\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) = \mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{CT_1}, \overrightarrow{CD}})$$

(version limite du thm de l'angle au centre)

Idem pour $\mathcal{C}_2$:

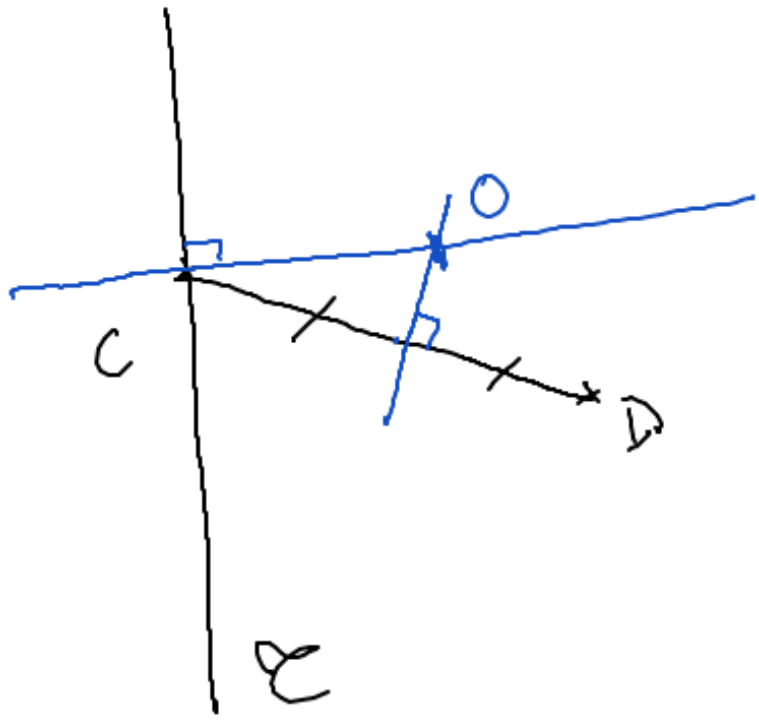
$$\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}}) = \mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{CT_2}, \overrightarrow{CD}})$$

avec T_2 sur la tangente à $\mathcal{C}_2$ au point C.

Par hypothèse : $\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{CT_1}, \overrightarrow{CD}}) = \mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{CT_2}, \overrightarrow{CD}}) = -\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CT_2}})$

donc $\widehat{(\overrightarrow{CT_1}, \overrightarrow{CT_2})} = 0$, ce qui signifie que C, T_1 et T_2 sont alignés.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont ainsi la même tangente $\mathcal{T}$ au point C.



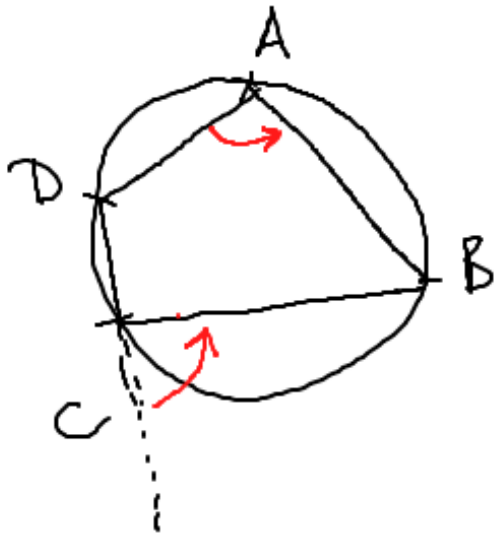
On en déduit $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$

et A, B, C, D sont cocycliques. $\square$

Application : caractérisation des quadrilatères convexes inscriptibles (= ayant un cercle circonscrit).

Prop – ABCD quadrilatère convexe non plat.

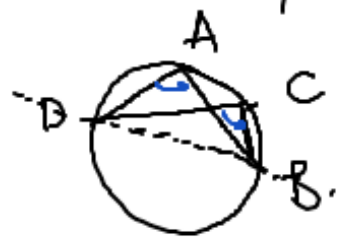
ABCD est inscriptible ssi $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) +$ angle plat.



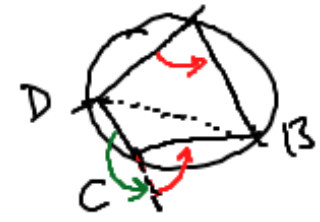
Dém A, B, C, D cocycliques ssi

$$\mathcal{L}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$$

i.e. $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$ ou $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) +$ angle plat.



Croisé



Convexe

$\square$

Comparaison entre angles orientés et angles géométriques.

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

angle géo. $\theta = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \in [0, \pi]$ $\qquad \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = (\vec{u} | \vec{v})$

en orientant le plan

angle orienté $\alpha = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \in [0, 2\pi[$

$\updownarrow$

la rotation qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

$$\boxed{\cos \theta = \cos \alpha}$$

$g_{(\vec{u}, \vec{v})}$ = la rotation qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

$$\mathrm{Mat}_{\text{b.o.n.d}}(g_{(\vec{u}, \vec{v})}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

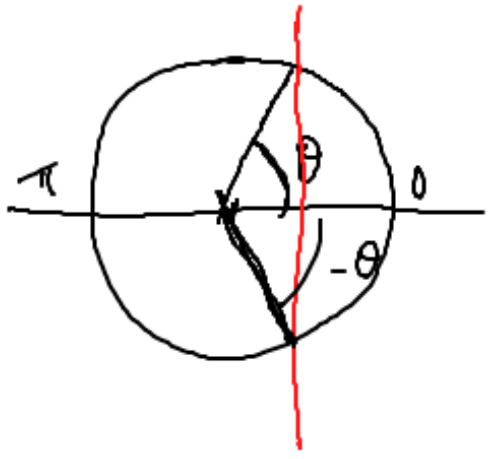
quelconque $\qquad$ b.o.n.d : $(\vec{u}, \vec{w})$

$$\vec{v} = (\vec{u}|\vec{v})\vec{u} + (\vec{w}|\vec{v})\vec{w}$$

$$\| $$

$$g_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{u}) = (\cos\alpha)\vec{u} + (\sin\alpha)\vec{w}$$

donc $\cos\alpha = (\vec{u}|\vec{v}) = \cos\theta$.



Conclusion: $\alpha = \theta$ ou

$\alpha = -\theta + 2\pi$

Utilisation des nombres complexes

On voit $\mathbb{C}$ comme un plan affine euclidien.

1) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dim 2, donc est en particulier un plan affine

$$a, b \in \mathbb{C} \qquad \overrightarrow{ab} = b - a$$

2) Le produit scalaire euclidien ?

On oriente $\mathbb{C}$ en décrétant que la base $(1, i)$ est directe.

La base $(1, i)$ est orthonormée.

Conséquence :

$$z = \alpha + i\beta \qquad (z|z') = (\alpha + i\beta | \gamma + i\delta) = \alpha\gamma(1|1) + \beta\delta(i|i) + (\alpha\delta + \beta\gamma)(1|i)$$

$$z' = \gamma + i\delta$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \qquad = \alpha\gamma + \beta\delta = \mathrm{Re}(z\overline{z'}).$$